Esame di Probabilità e Statistica del 4 aprile 2005
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Siano A, B, C eventi indipendenti in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Dimostrare che le seguenti coppie di eventi sono indipendenti: (A^c, B); $(A \cap B, C^c)$; $(A \cup B, C)$;

b) Come cambiano le risposte del punto a) se gli eventi A, B, C sono solo indipendenti a 2 a 2? Giustificare le risposte con dimostrazioni e/o controesempi.

Esercizio 2. Siano X_1, X_2 variabili aleatorie indipendenti, entrambe di legge $Po(\lambda)$.

a) Fissati $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, calcolare

$$P\{X_1 = k | X_1 + X_2 = n\}$$

b) Supponendo n fissato, si dimostri che l'espressione sopra è il valore della densità di una variabile aleatoria binomiale.

c) Siano $X_1, \ldots, X_m$ variabili aleatorie i.i.d. di legge $Po(\lambda)$. Si calcoli

$$P\{X_1 = k | X_1 + \cdots X_m = n\}$$

Esercizio 3. La densità congiunta di X e Y è data da

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{per } 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare:

a) $\mathbb{P}\{X > 1, Y < 1\}$, $\mathbb{P}\{X < a\}$;

b) $\mathbb{P}\{X < Y\}$;

c) la densità della variabile aleatoria X/Y.

Esercizio 4. Su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ siano $(X_n)_n$ variabili aleatorie reali i.i.d. di legge $N(0, 1)$. Posto $S_n := X_1^2 + \ldots + X_n^2$, si risponda alle seguenti domande:

a) che legge ha S_n?

b) calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} P\{S_n > \sqrt{n}\}$

c) calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} P\{S_n > n\}$

d) calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} P\{S_n > n + \sqrt{2n}\}$

Suggerimento: per il punto b), usare la legge dei grandi numeri. Per i punti c) e d), usare il fatto che $E[X_1^4] = 3$.

Soluzioni

Esercizio 1.

a) L'indipendenza della prima coppia segue dalla Proposizione 1.4.6 delle dispense, oppure dall'unione disgiunta $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ e da

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(A^c)$$

Per la seconda coppia basta dimostrare che C è indipendente da $A \cap B$ (e poi ci si riconduce alla prima coppia): ma per l'indipendenza di A, B, C si ha:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = P(A \cap B)P(C)$$

Per la terza coppia si ha che

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = \\ &= P(C)(P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = P(C)P(A \cup B) \end{aligned}$$

oppure si può ragionare nel seguente modo: la tesi è equivalente a dire che $(A \cup B)^c$ e C sono indipendenti. Ma $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; siccome A^c, B^c, C sono indipendenti, ci si riconduce al caso precedente.

b) Ovviamente la prima risposta non cambia. Per le altre due risposte, consideriamo lo spazio probabilizzato $\Omega = \{a, b, c, d\}$ dotato della probabilità uniforme, e gli eventi $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{a, c\}$. Allora A, B, C sono indipendenti a due a due, ma si ha

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A \cap B)P(C)$$

quindi $(A \cap B)$ e C non sono indipendenti, e quindi neppure $(A \cap B)$ e C^c lo possono essere; infine

$$P((A \cup B) \cap C) = P(C) = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{8} = P(A \cup B)P(C)$$

Esercizio 2.

a) Usando il fatto che $X_1 + X_2 \sim Po(2\lambda)$, si ha

$$\begin{aligned} P\{X_1 = k | X_1 + X_2 = n\} &= \frac{P\{X_1 = k, X_1 + X_2 = n\}}{P\{X_1 + X_2 = n\}} = \\ &= \frac{P\{X_1 = k\}P\{X_2 = n - k\}}{P\{X_1 + X_2 = n\}} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^n}{n!}} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

b) Se fissiamo n, il valore trovato sopra è la densità discreta di una legge $B(n, \frac{1}{2})$.

c) Dato che $X_1, \ldots, X_m$ sono i.i.d. di legge $Po(\lambda)$, la variabile aleatoria $Y := X_2 + \ldots + X_m$ ha legge $Po((m-1)\lambda)$, e la variabile aleatoria $X_1 + Y$ ha legge $Po(m\lambda)$,. Allora, con calcoli analoghi al punto a) si ha:

$$\begin{aligned} P\{X_1 = k | X_1 + Y = n\} &= \frac{P\{X_1 = k, Y = n-k\}}{P\{X_1 + Y = n\}} = \frac{P\{X_1 = k\}P\{Y = n-k\}}{P\{X_1 + Y = n\}} = \\ &= \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-(m-1)\lambda}\frac{((m-1)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-m\lambda}\frac{(m\lambda)^n}{n!}} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Esercizio 3. Innanzitutto notiamo che la densità è fattorizzabile nella forma $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, con $f_X(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}$ e $f_Y(x) = 2e^{-2x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}$ quindi possiamo subito dire che X e Y sono indipendenti.

a) Ricordando che la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria di legge $Exp(\lambda)$ è uguale a $1 - e^{-\lambda t}$, calcoliamo:

$$P\{X > 1, Y < 1\} = P\{X > 1\}P\{Y < 1\} = (1 - F_X(1))F_Y(1) = e^{-1}(1 - e^{-2})$$

Inoltre:

$$P\{X < a\} = F_X(a) = 1 - e^{-a}$$

b) Calcoliamo:

$$P\{X < Y\} = \int_0^{+\infty}\int_0^y 2e^{-x}e^{-2y}\ dx\ dy = \frac{1}{3}$$

c) Questo punto si può fare in due modi: uno è considerare il diffeomorfismo $\varphi(x,y) := (\frac{x}{y}, y)$ definito da $(0,+\infty)^2$ in sè: questa trasformazione è invertibile, con inversa $\varphi^{-1}(w,z) := (wz, z)$. Inoltre, entrambe le trasformazioni sono differenziabili, e

$$\det \mathrm{Jac}\ \varphi^{-1}(w,z) = \det\begin{pmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = z$$

che è diverso da 0 per ogni $(z,w) \in (0,+\infty)^2$. Allora la densità congiunta di $(X/Y, Y)$ è

$$f_{\frac{X}{Y},Y}(w,z) = |\det \mathrm{Jac}\ \varphi^{-1}(w,z)| f_{X,Y}(\varphi^{-1}(w,z)) = 2ze^{-wz}e^{-2z}$$

per $(z,w) \in (0,+\infty)^2$, e la densità marginale di X/Y è quindi

$$f_X(w) = \int_0^{+\infty} f_{\frac{X}{Y},Y}(w,z)\ dz = \int_0^{+\infty} 2ze^{-(2+w)z}\ dz = \frac{2}{(2+w)^2}$$

per $w > 0$.

L'altro modo è il seguente. La densità di X/Y sarà uguale alla derivata della sua funzione di ripartizione. Dato che $Y > 0$ quasi certamente, si ha che per ogni $t > 0$:

$$F_{X/Y}(t) = P\{X/Y \leq t\} = P\{X \leq tY\} = \int_0^{+\infty}\int_0^{ty} 2e^{-x}e^{-2y}\ dx\ dy = 1 - \frac{2}{2+t}$$

Derivando si ha:

$$f_{X/Y}(t) = F'_{X/Y}(t) = \frac{2}{(2+t)^2}$$

Esercizio 4.

a) Sappiamo che il quadrato di una variabile aleatoria gaussiana ha legge $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2(1)$. Siccome $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, allora S_n ha legge $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2(n)$.

b) Sappiamo che $E[X_i^2] = \text{Var}\,[X_i] + E[X_i]^2 = 1 + 0 = 1$. Allora, per la legge dei grandi numeri sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| > \varepsilon\right\} = 0$$

Allora abbiamo che:

$$P\{S_n > \sqrt{n}\} = P\left\{1 - \frac{S_n}{n} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} \geq P\left\{\left|1 - \frac{S_n}{n}\right| < 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$$

e quindi, passando ai complementari per $n > 4$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} P\{S_n \leq \sqrt{n}\} \leq \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|1 - \frac{S_n}{n}\right| \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} < \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|1 - \frac{S_n}{n}\right| > \frac{1}{2}\right\} = 0$$

Infine

$$\lim_{n\to\infty} P\{S_n > \sqrt{n}\} = \lim_{n\to\infty} (1 - P\{S_n \leq \sqrt{n}\}) = 1 - \lim_{n\to\infty} P\{S_n \leq \sqrt{n}\} = 1 - 0 = 1$$

c) Per calcolare questa probabilità bisogna usare il teorema limite centrale, per cui ci serve la varianza delle X_i^2: grazie al suggerimento, si ha che $\text{Var}\,[X_i^2] = \mathbb{E}[X_i^4] - \mathbb{E}[X_i^2]^2 = 3 - 1 = 2$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{S_n > n\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{S_n - n}{\sqrt{2n}} > 0\right\} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{2}$$

d) Con calcoli analoghi al punto c), abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{S_n > n + \sqrt{2n}\} &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{S_n - n}{\sqrt{2n}} > \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}}\right\} = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}}\, dx = \\ &= 1 - F_Z(1) = 1 - 0.84134 = 0.15826\end{aligned}$$

dove Z è una generica variabile aleatoria di legge $N(0,1)$.

Esame di Calcolo delle Probabilità del 4 aprile 2005
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Sono ammessi all'orale:

Alessio Davide	20
Bertolotti Ilaria	18,5
Bettin Sandro	25,5
Catalano Michela	18
Da Vià Marco	17,5
De Rossi Giulia	32
Garonzi Martino	23
Marchioni Marcello	25
Marigo Raffaele	23,5
Nicchio Giulia	18
Pasetto Damiano	22,5
Pegoraro Patrizia	18
Piazzon Federico	18
Pinton Stefano	28,5
Rossignolo Eleonora	19,5
Trevisan Marco	31
Varotto Aurora	18
???	21

Visione compiti e orali: venerdì 8 aprile ore 10 aula P100