Esame di Probabilità e Statistica del 11 luglio 2005
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Un modello semplificato per le variazioni del prezzo delle azioni presume che ogni giorno il prezzo di una azione salga di una unità con probabilità p o scenda di una unità con probabilità $1 - p$. Si assume che le variazioni del prezzo in giorni diversi siano indipendenti. Calcolare la probabilità:

a) che il prezzo delle azioni torni a quello di partenza dopo 2 giorni;

b) che il prezzo delle azioni sia salito di una unità dopo 3 giorni;

c) che il prezzo delle azioni fosse salito il primo giorno, sapendo che dopo 3 giorni è salito di una unità.

Esercizio 2. Il numero di uova deposte da un particolare insetto su una foglia è dato da una variabile aleatoria X di legge $Po(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Tuttavia, questa variabile può essere osservata solo se è positiva, poichè se vale 0 non possiamo sapere se l'insetto studiato fosse effettivamente presente su quella foglia. Se denotiamo con Y il numero osservato di uova, allora abbiamo che

$$\mathbb{P}\{Y = k\} = \mathbb{P}\{X = k | X > 0\}$$

Calcolare:

a) la densità discreta di Y;

b) la sua media;

c) la sua funzione generatrice dei momenti;

d) la sua varianza.

Esercizio 3. Un uomo e una donna si danno appuntamento davanti a un cinema alle 12.30. Se l'uomo arriva in un istante uniformemente distribuito sull'intervallo tra le 12.15 e le 12.45 e la donna, in maniera indipendente dall'uomo, arriva in un istante uniformemente distribuito sull'intervallo tra le 12 e le 13:

a) qual è la probabilità che l'uomo arrivi per primo?

b) qual è la probabilità che il primo che arriva attenda l'altro per non più di 5 minuti?

Esercizio 4. Siano $X_1, \dots, X_{20}$ variabili aleatorie esponenziali di media 1.

a) Si usi la prima disuguaglianza di Chebichev (quella relativa alla media) per ottenere una limitazione alla probabilità

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right\}$$

b) Si usi la seconda disuguaglianza di Chebichev (quella relativa alla varianza) per ottenere una limitazione alla probabilità del punto (a).

c) Si usi il teorema limite centrale per approssimare la quantità del punto (a).

Soluzioni

Esercizio 1. La notazione è notevolmente semplificata se si modellizza il prezzo delle azioni in questo modo. Consideriamo $(X_i)_i$ i.i.d. di legge $Be(p)$, e definiamo $Y_i := 2X_i - 1$ e $S_n := \sum_{i=1}^n Y_n$. Allora Y_i rappresenta la variazione di prezzo dell'i-esimo giorno, e S_n la variazione di prezzo dopo n giorni. Se definiamo poi $T_n := \sum_{i=1}^n X_i$, allora $T_n \sim B(n,p)$ e $S_n = 2T_n - n$.

a) Bisogna calcolare

$$\mathbb{P}\{S_2 = 0\} = \mathbb{P}\{2T_2 - 2 = 0\} = \mathbb{P}\{T_2 = 1\} = 2p(1-p)$$

b) Calcoliamo

$$\mathbb{P}\{S_3 = 1\} = \mathbb{P}\{2T_3 - 3 = 1\} = \mathbb{P}\{T_3 = 1\} = 3p(1-p)^2$$

c) Questo punto si può fare in diversi modi. Un modo è

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_1 = 1 | S_3 = 1\} &= \frac{\mathbb{P}\{S_1 = 1, S_3 = 1\}}{\mathbb{P}\{S_3 = 1\}} = \frac{\mathbb{P}\{Y_1 = 1, Y_2 + Y_3 = 0\}}{3p(1-p)^2} = \\ &= \frac{\mathbb{P}\{Y_1 = 1\}\mathbb{P}\{Y_2 + Y_3 = 0\}}{3p(1-p)^2} = \frac{p \cdot 2p(1-p)}{3p(1-p)^2} = \frac{2p}{3(1-p)} \end{aligned}$$

e a conclusioni analoghe si arriva utilizzando la formula di Bayes.

Esercizio 2.

a) In generale per $k \geq 1$ si ha:

$$\mathbb{P}\{Y = k\} = \mathbb{P}\{X = k | X > 0\} = \frac{\mathbb{P}\{X = k\}}{1 - \mathbb{P}\{X = 0\}} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}{1 - e^{-\lambda}}$$

mentre ovviamente si ha che $\mathbb{P}\{Y = 0\} = 0$.

b) Applicando la definizione di speranza di una variabile aleatoria discreta si ha che

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}\{Y = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{1}{1 - e^{-1}} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}$$

dove per l'ultima uguaglianza si è usato il fatto che $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-1}/k!$ è esattamente la somma che risulta dalla speranza di una variabile aleatoria di Poisson di parametro 1, e quindi è uguale a 1.

c) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \gamma_Y(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk}\mathbb{P}\{Y = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}{1 - e^{-\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}(\exp(\lambda(e^t - 1)) - e^{-\lambda}) = \frac{e^{\lambda e^t} - 1}{e^{\lambda} - 1} \end{aligned}$$

d) Derivando due volte γ_Y e calcolandola nel punto 0 si ha:

$$E[Y^2] = \gamma_Y''(0) = \frac{\lambda e^\lambda (1+\lambda)}{e^\lambda - 1} = \frac{\lambda(1+\lambda)}{1-e^{-\lambda}}$$

a cui si arriva anche calcolando $E[Y^2]$ attraverso il calcolo della serie. Si ricava poi

$$\text{Var }[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{\lambda(1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda})}{(1-e^{-\lambda})^2}$$

Esercizio 3. Innanzitutto rappresentiamo le due variabili aleatorie in questo modo: chiamiamo $X_1 \sim U(15, 45)$ il tempo di arrivo dell'uomo e $X_2 \sim U(0, 60)$ il tempo di arrivo della donna, con X_1 e X_2 indipendenti tra di loro. Allora $(X_1, X_2) \sim U([15, 45] \times [0, 60])$.

a) Bisogna calcolare

$$P\{X_1 < X_2\} = \int_{15}^{45} \int_0^{x_1} \frac{1}{30 \cdot 60}\, dx_1\, dx_2 = \int_{15}^{45} \frac{x_1}{30 \cdot 60}\, dx_1\, dx_2 = \left[\frac{x_1^2}{2 \cdot 30 \cdot 60}\right]_{15}^{45} = \frac{1}{2}$$

b) Calcoliamo:

$$P\{|X_1 - X_2| < 5\} = P\{-5 < X_1 - X_2 < 5\} = \int_{15}^{45} \int_{x_1-5}^{x_1+5} \frac{1}{30 \cdot 60}\, dx_1\, dx_2 = \frac{1}{6}$$

Esercizio 4.

a) Sappiamo che $E[X_i] = \text{Var }[X_i] = 1$. Chiamando $S_{20} := \sum_{i=1}^{20} X_i$, si ha che

$$P\{S_{20} > 15\} \leq \frac{E[S_{20}]}{15} = \frac{\sum_{i=1}^{20} E[X_i]}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

che è una limitazione banale, poichè sicuramente $P\{S_{20} > 15\} < 1$.

b) Passando al complementare si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_{20} \leq 15\} &= \mathbb{P}\{S_{20} - 20 \leq 15 - 20\} \leq \mathbb{P}\{|S_{20} - 20| \geq 5\} \leq \frac{\text{Var }[S_{20}]}{25} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{20} \text{Var }[X_i]}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

quindi

$$\mathbb{P}\{S_{20} > 15\} \geq 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

c) Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_{20} > 15\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{S_{20} - 20}{\sqrt{20}} > \frac{15 - 20}{\sqrt{20}}\right\} \simeq \mathbb{P}\left\{Z > -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\} = \mathbb{P}\{Z < 1.12\} = \\ &= F_Z(1.12) = 0.86864 \end{aligned}$$

dove Z è una generica variabile aleatoria di legge $N(0, 1)$. Notiamo che non bisogna applicare la correzione di continuità, in quanto le X_i sono variabili aleatorie continue.

Esame di Calcolo delle Probabilità del 11 luglio 2005
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Sono ammessi all'orale:

Albertini Ilaria	18,5
Church Jon Matteo	28
Masarotto Valentina	27
Pescarollo Chiara	17
Ramo Valentina	21,5

Visione compiti e orali: giovedì 14 luglio ore 11 nel mio studio