Esame di Probabilità e Statistica del 21 marzo 2007
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Un amico sceglie a caso due carte, senza rimpiazzo, da un mazzo di 52 carte. In ognuna delle situazioni che seguono, determinare la probabilità condizionata che entrambe le carte siano assi, se sappiamo che:

1. Una delle carte è l'asso di picche.
2. La prima carta è un asso.
3. La seconda carta è un asso.
4. Una delle carte è un asso.

Esercizio 2. Il trasporto di 148 alunni di una scuola presso un campo sportivo viene realizzato tramite 4 autobus, sui quali salgono 40, 33, 25 e 50 ragazzini. Si sceglie un alunno a caso e si denota con X il numero totale di quelli saliti sul suo stesso autobus. Si sceglie poi, indipendentemente, uno dei quattro autisti e si denota con Y il numero totale di alunni saliti sull'autobus da lui portato.

1. Che legge hanno X e Y?
2. Calcola $\mathbb{E}[X]$ ed $\mathbb{E}[Y]$.
3. Calcola $\mathrm{Var}\,[X]$ e $\mathrm{Var}\,[Y]$.

Esercizio 3. Vogliamo costruire due centri assistenza veicoli su un'autostrada, che per semplicità supponiamo di lunghezza unitaria. Supponiamo che un veicolo che si guasta si trovi nella posizione $X \sim U(0,1)$ nell'autostrada, e che il carro attrezzi possa uscire dal più vicino dei due centri, che si trovano nelle posizioni a e b, con $0 < a < b < 1$.

1. Dimostrare che la distanza media che il carro attrezzi percorrerà è uguale a $f(a,b) := E[\min(|X-a|, |X-b|)]$.
2. Calcolare $f(a,b)$.
3. Trovare la coppia (a,b) che minimizza $f(a,b)$.

Esercizio 4. Un docente sa dall'esperienza passata che il punteggio all'esame finale degli studenti del suo corso è distribuito con media 77 e deviazione standard 15. Attualmente egli ha due classi diverse, una di 64 e una di 25 studenti.

1. Quanto vale la probabilità che la media aritmetica dei punteggi della classe di 25 studenti $\bar{X}_{25}$ sia compresa tra 72 e 82?
2. E per l'altra classe? (chiamiamo $\bar{Y}_{64}$ la media aritmetica in questo caso)
3. Quanto vale approssimativamente la probabilità che il punteggio medio della classe da 25 superi quello della classe da 64?
4. Supponiamo che i punteggi medi delle due classi siano 76 e 83. Quale delle due classi è più probabile abbia ottenuto il punteggio di 83? Per rispondere a questa domanda, calcolare $\mathbb{P}\{\bar{X}_{25} \leq 76, \bar{Y}_{64} \geq 83\}$ e $\mathbb{P}\{\bar{Y}_{64} \leq 76, \bar{X}_{25} \geq 83\}$.

Soluzioni

Esercizio 1. Dato che nei punti 2. e 3. viene considerato l'ordine con cui escono le carte, lo spazio probabilizzato più adatto è

$$\Omega := D_2^{52} = \{((i,x),(j,y)) \mid i,j = 1,\dots,13, \quad x,y = C,Q,F,P\}$$

Come di consueto, poniamo $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}$ la legge uniforme, che assegna probabilità uguale a $1/|\Omega| = \frac{1}{52\cdot 51}$ ad ogni singoletto. Poniamo poi

$$\begin{aligned} B &:= \{((1,x),(1,y)) \mid x,y = C,Q,F,P, x \neq y\}, \qquad A_1 := \{((i,x),(j,y)) \ni (1,P)\}, \\ A_2 &:= \{((1,x),(j,y))\}, \qquad A_3 := \{((i,x),(1,y))\}, \\ A_4 &:= \{((i,x),(j,y)) \mid i = 1 \text{ o } j = 1\} \end{aligned}$$

1. Abbiamo $|A_1| = 51 + 51 = 102$, e $B \cap A_1 = \{((1,x),(1,y)) \mid x = P \text{ o } y = P\}$, quindi $|B \cap A_1| = 3 + 3$. Allora

$$\mathbb{P}(B|A_1) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\frac{6}{52\cdot 51}}{\frac{102}{52\cdot 51}} = \frac{1}{17} = 0.059$$

2. Abbiamo $|A_2| = 4 \cdot 51$, e $B \cap A_2 = B$, con $|B| = 4 \cdot 3$, quindi

$$\mathbb{P}(B|A_2) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{\frac{4\cdot 3}{52\cdot 51}}{\frac{4\cdot 51}{52\cdot 51}} = \frac{1}{17} = 0.059$$

3. Abbiamo $|A_3| = 4 \cdot 51$, e $B \cap A_3 = B$, quindi come prima

$$\mathbb{P}(B|A_3) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{\frac{4\cdot 3}{52\cdot 51}}{\frac{4\cdot 51}{52\cdot 51}} = \frac{1}{17} = 0.059$$

4. Abbiamo $A_4 = A_2 \cup A_3 = (A_2^c \cap A_3^c)^c$, quindi calcolando direttamente questa probabilità oppure usando il fatto che $B = A_2 \cap A_3$ e che quindi $\mathbb{P}(A_4) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(B) = \frac{2\cdot 4\cdot 51 - 4\cdot 3}{52\cdot 51}$, e ovviamente $B \cap A_4 = B$, si ha che

$$\mathbb{P}(B|A_4) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A_4)} = \frac{\frac{4\cdot 3}{52\cdot 51}}{\frac{2\cdot 4\cdot 51 - 4\cdot 3}{52\cdot 51}} = \frac{1}{33} = 0.030$$

Esercizio 2.

1. Entrambe le variabili aleatorie assumono valori nell'insieme $E := \{40, 33, 25, 50\}$. Supponendo che la scelta dell'alunno venga fatta con legge uniforme, la probabilità che venga scelto un alunno dell'autobus 1, 2, 3, 4 è rispettivamente uguale a $\frac{40}{148}$, $\frac{33}{148}$, $\frac{25}{148}$, $\frac{50}{148}$, quindi $p_X(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = \frac{x}{148}$ per ogni $x \in E$. Supponendo che anche la scelta degli autisti avvenga in modo uniforme, si ha che $p_Y(y) = \mathbb{P}\{Y = y\} = \frac{1}{4}$ per ogni $y \in E$.

2. Dato che X e Y possono assumere un numero finito di possibili valori, hanno entrambe speranza finita; abbiamo allora

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x p_X(x) = 40 \cdot \frac{40}{148} + 33 \cdot \frac{33}{148} + 25 \cdot \frac{25}{148} + 50 \cdot \frac{50}{148} = 39.28$$

e

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y \in E} y p_Y(y) = 40 \cdot \frac{1}{4} + 33 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{1}{4} + 50 \cdot \frac{1}{4} = 37$$

3. Abbiamo

$$\mathrm{Var}\,[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 40^2 \cdot \frac{40}{148} + 33^2 \cdot \frac{33}{148} + 25^2 \cdot \frac{25}{148} + 50^2 \cdot \frac{50}{148} - (39.28)^2 = 82.50$$

e per Y possiamo invece usare la definizione della varianza

$$\mathrm{Var}\,[Y] = (40-37)^2 \cdot \frac{1}{4} + (33-37)^2 \cdot \frac{1}{4} + (25-37)^2 \cdot \frac{1}{4} + (50-37)^2 \cdot \frac{1}{4} = 84.5$$

Esercizio 3.

1. Se il veicolo si trova nella posizione X, allora il carro attrezzi percorrerà la distanza $|X-a|$ se parte da a e $|X-b|$ se parte da b; poichè uscirà dal più vicino dei due centri, la distanza percorsa sarà $\min(|X-a|, |X-b|)$, e quindi la sua media è in effetti uguale a $f(a,b) := \mathbb{E}[\min(|X-a|, |X-b|)]$.

2. Dato che X è una variabile aleatoria quasi certamente limitata e $x \to \min(|x-a|, |x-b|)$ è continua, sicuramente $\min(|X-a|, |X-b|)$ è limitata e quindi in $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si ha allora

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \mathbb{E}[\min(|X-a|, |X-b|)] = \int_0^1 \min(|x-a|, |x-b|)\, dx = \\ &= \int_0^a (a-x)\, dx + \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\, dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\, dx + \int_b^1 (x-b)\, dx = \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{4} + \frac{(1-b)^2}{2} \end{aligned}$$

3. Calcolando le derivate parziali di f si ha

$$f_a(a,b) = a - \frac{b-a}{2} = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b, \quad f_b(a,b) = \frac{b-a}{2} - (1-b) = -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b - 1$$

Ponendo il gradiente uguale a 0 si ottiene la soluzione $(a,b) = (1/4, 3/4)$. Calcolando l'hessiano di f si ha poi

$$Hf(a,b) = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

per ogni a, b, che è sempre definito positivo. Questo significa che il punto $(1/4, 3/4)$ è un punto di minimo locale, ed essendo l'unico, anche globale.

Esercizio 4. Consideriamo variabili aleatorie $(X_i)_{i=1,\dots,25}$ e $(Y_i)_{i=1,\dots,64}$, i.i.d. e con media $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[Y_i] = 77$ e varianza $\mathrm{Var}\,[X_i] = \mathrm{Var}\,[Y_i] = 15^2$.

1. Supponendo di utilizzare l'approssimazione normale, calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{72 \le \bar{X}_{25} \le 82\} = \mathbb{P}\left\{\frac{72-77}{15/\sqrt{25}} \le \frac{\bar{X}_{25}-77}{15/\sqrt{25}} \le \frac{82-77}{15/\sqrt{25}}\right\} =& \\ = \mathbb{P}\left\{-\frac{5}{3} \le S^*_{25} \le \frac{5}{3}\right\} \simeq \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right)\right) =& \\ = 2\Phi\left(\frac{5}{3}\right) - 1 = 2\cdot 0.95154 - 1 = 0.90308&\end{aligned}$$

   Volendo applicare anche la correzione di continuità per il fatto che i voti possono essere solo numeri interi, bisogna tener presente che $\bar{X}_{25}$ può assumere solo valori della forma $k/25$, con $k \in \mathbb{N}$, quindi bisogna calcolare $\mathbb{P}\{71.98 \le \bar{X}_{25} \le 82.02\}$, che (nei limiti dell'approssimazione delle tavole della legge normale) dà un risultato uguale al precedente.

2. Supponendo di utilizzare l'approssimazione normale, calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{72 \le \bar{Y}_{64} \le 82\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{72-77}{15/\sqrt{64}} \le \frac{\bar{Y}_{64}-77}{15/\sqrt{64}} \le \frac{82-77}{15/\sqrt{64}}\right\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{-\frac{8}{3} \le S^*_{64} \le \frac{8}{3}\right\} \simeq 2\Phi\left(\frac{8}{3}\right) - 1 = 0.99218\end{aligned}$$

3. Usando l'approssimazione normale, possiamo approssimare la legge di $\bar{X}_{25}$ con una legge $N(77; \frac{15^2}{25})$ e la legge di $\bar{Y}_{64}$ con una legge $N(77; \frac{15^2}{64})$. Allora, siccome le $(X_i)_i$ e le $(Y_i)_i$ sono indipendenti, possiamo approssimare la legge di $\bar{X}_{25} - \bar{Y}_{64}$ con $N(0; \sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}})$, con $\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}} := 15(\frac{1}{25} + \frac{1}{64})$, quindi

$$\mathbb{P}\{\bar{X}_{25} > \bar{Y}_{64}\} = \mathbb{P}\{\bar{X}_{25} - \bar{Y}_{64} > 0\} = \mathbb{P}\left\{\frac{\bar{X}_{25} - \bar{Y}_{64}}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}} > 0\right\} = 1 - \Phi(0) = 0.5$$

4. Usando l'indipendenza di $(X_i)_i$ e $(Y_i)_i$, calcoliamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\bar{X}_{25} \le 76, \bar{Y}_{64} \ge 83\} = \mathbb{P}\{\bar{X}_{25} \le 76\}\mathbb{P}\{\bar{Y}_{64} \ge 83\} =& \\ = \mathbb{P}\left\{\frac{\bar{X}_{25}-77}{15/\sqrt{25}} \le \frac{76-77}{15/\sqrt{25}}\right\}\mathbb{P}\left\{\frac{\bar{Y}_{64}-77}{15/\sqrt{64}} \ge \frac{83-77}{15/\sqrt{64}}\right\} \simeq& \\ \simeq \Phi\left(-\frac{1}{3}\right)\left(1 - \Phi\left(\frac{16}{5}\right)\right) \le (1-\Phi(0.33))(1-\Phi(2.99)) = 0.0004782&\end{aligned}$$

   e

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\bar{X}_{25} \ge 83, \bar{Y}_{64} \le 76\} = \mathbb{P}\{\bar{X}_{25} \ge 83\}\mathbb{P}\{\bar{Y}_{64} \le 76\} =& \\ = \mathbb{P}\left\{\frac{\bar{X}_{25}-77}{15/\sqrt{25}} \ge \frac{83-77}{15/\sqrt{25}}\right\}\mathbb{P}\left\{\frac{\bar{Y}_{64}-77}{15/\sqrt{64}} \le \frac{76-77}{15/\sqrt{64}}\right\} \simeq& \\ \simeq (1-\Phi(2))\Phi\left(-\frac{8}{15}\right) = (1-\Phi(2))(1-\Phi(0.53)) = 0.00678&\end{aligned}$$

   Siccome questa seconda probabilità è più elevata, riteniamo più probabile che la votazione media che si discosta maggiormente dalla speranza (cioè quella di 83) sia della classe meno numerosa (quella da 25).

Esame di Calcolo delle Probabilità del 21 marzo 2007
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Hanno superato la prova:

Bacco Andrea	$14 + 3^+$
Bettin Marta	$17 + 3^-$
Brentegagni Laura	$14.5 + 3^-$
Chinellato Sara	$19.5 + 3^+$
Consarino Maria	$14 + 3^+$
Ferro Daniele	$16 + 3^+$
Fuson Sara	$16 + 3^-$
Gemin Stefano	$20 + 3^-$
Lazzarini Giovanni	$26 + 3^+$
Padoan Roberta	$23.5 + 3^+$
Parolin Catia	$14.5 + 3^+$
Pastro Valerio	$20 + 3^-$
Sala Valentina	$24.5 + 3^-$
Sambin Nicola	$25 + 3^+$
Semenzato Chiara	$14 + 3^+$
Semenzato Manuela	$15.5 + 3^-$
Siviero Andrea	$22.5 + 3^+$
Zanibellato Andrea	$23.5 + 3^+$
Zordan Michele	$23.5 + 3^-$
Zottarel Angela	$23 + 3^+$

Visione compiti, registrazione voti e orali: mercoledì 28 marzo ore 16 aula 1BC/50, oppure giovedì 29 ore 15 aula 1BC/50.
Verrà data precedenza alla registrazione voti a chi accetta il voto dello scritto e ha il bonus di + 3.