Esame di Probabilità e Statistica del 3 aprile 2007
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Il 46% degli elettori di un comune si ritiene di centro, il 30% di sinistra e il 24% di destra. Alle ultime elezioni sono andati a votare il 35% degli elettori di centro, il 62% di quelli di sinistra e il 58% di quelli di destra. Un elettore è scelto a caso. Sapendo che l'elettore ha votato alle ultime elezioni, qual è la probabilità che si tratti di un elettore:

1. del centro;
2. di sinistra;
3. di destra.
4. Quale percentuale di elettori ha partecipato alla scorsa elezione?

Esercizio 2. In una famiglia ci sono $n \geq 1$ bambini con probabilità pari a αp^n, con $\alpha \leq 1/p - 1$.

1. Quanto vale la probabilità che in una famiglia non ci siano figli?
2. Se ogni figlio è maschio o femmina con uguale probabilità e in maniera indipendente dagli altri figli, qual è la probabilità di avere k maschi se si sa che in una famiglia ci sono in totale n figli? (distinguere i casi $n = 0$ e $n \geq 1$)
3. Ricavare una formula generale per la probabilità totale di avere k maschi e un qualsiasi numero di femmine (distinguere i casi $k = 0$ e $k \geq 1$).
4. Quanto vale la probabilità del punto precedente per $k = 0$?

Esercizio 3. Un ospedale è situato al centro esatto di una città quadrata i cui lati sono lunghi 3 km. Il sistema di strade è rettangolare, quindi la distanza in km dall'ospedale, le cui coordinate sono $(0, 0)$, al punto (x, y) è pari a $|x|+|y|$. Un'ambulanza parte dall'ospedale non appena c'è un incidente. Supponiamo che questo avvenga in un punto uniformemente distribuito nel quadrato.

1. Definire la variabile aleatoria X = "distanza percorsa dall'ambulanza" e determinarne la legge.
2. Calcolare F_X.
3. Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\text{Var}\,[X]$.

Supponiamo che si verifichino contemporaneamente due incidenti in due diversi punti della città.

4. Definire la variabile aleatoria Z = "massima distanza percorsa dalle due ambulanze" e determinarne legge e densità.

Esercizio 4. Supponiamo che un dado equilibrato venga lanciato 100 volte, e sia X_i il valore del lancio i-esimo.

1. Calcolare $\mathbb{E}[\log X_i]$.
2. Calcolare $\mathrm{Var}\,[\log X_i]$.
3. Supponendo di poter usare l'approssimazione normale, per ogni $a \in (1, 6)$ si calcoli
$$\mathbb{P}\left\{\prod_{i=1}^{100} X_i \le a^{100}\right\}$$
4. Determinare a tale che la probabilità precedente valga circa $1/2$.

Soluzioni

Esercizio 1. Definiamo gli eventi

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\text{l'elettore è di sinistra}\}, & A_2 &:= \{\text{l'elettore è di centro}\}, \\ A_3 &:= \{\text{l'elettore è di destra}\}, & V &:= \{\text{l'elettore ha votato alle ultime elezioni}\}, \end{aligned}$$

allora i dati si possono riscrivere così:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) = 0.3, \qquad \mathbb{P}(A_2) &= 0.46, \qquad \mathbb{P}(A_3) = 0.24, \\ \mathbb{P}(V|A_1) = 0.62, \qquad \mathbb{P}(V|A_2) &= 0.35, \qquad \mathbb{P}(V|A_3) = 0.58. \end{aligned}$$

Ovviamente per fare i primi 3 punti è indispensabile fare prima il punto 4.

4) Dato che $\cup_{i=1}^3 A_i = \Omega$ e l'unione è disgiunta, usando la formula della probabilità totale calcoliamo

$$\mathbb{P}(V) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(V|A_i)\mathbb{P}(A_i) = 0.62 \cdot 0.3 + 0.35 \cdot 0.46 + 0.58 \cdot 0.24 = 0.4862$$

1,2,3) Usando la formula di Bayes, le probabilità richieste sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_2|V) &= \frac{\mathbb{P}(V|A_2)\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{0.35 \cdot 0.46}{0.4862} = 0.331139, \\ \mathbb{P}(A_1|V) &= \frac{\mathbb{P}(V|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{0.62 \cdot 0.3}{0.4862} = 0.382559, \\ \mathbb{P}(A_2|V) &= \frac{\mathbb{P}(V|A_3)\mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{0.58 \cdot 0.24}{0.4862} = 0.286302 \end{aligned}$$

Esercizio 2.

1. Siccome X è concentrata sui naturali, abbiamo

$$\mathbb{P}\{X = 0\} = 1 - \mathbb{P}\{X > 0\} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X = n\} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = 1 - \frac{\alpha p}{1-p}$$

2. Condizionatamente all'evento $\{X = n\}$, possiamo definire il numero di figli maschi con la variabile aleatoria $Y := \sum_{i=1}^{X} Y_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, dove le $(Y_i)_i$ sono i.i.d. di legge $Be(\frac{1}{2})$. Allora $Y \sim B(n, \frac{1}{2})$, quindi per $0 \le k \le n$ si ha

$$\mathbb{P}\{Y = k \mid X = n\} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

mentre per tutti gli altri k, n la probabilità è nulla.

3. In generale si ha, per la formula della probabilità totale,

$$\mathbb{P}\{Y = k\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{Y = k \mid X = n\}\mathbb{P}\{X = n\} = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\{Y = k \mid X = n\}\mathbb{P}\{X = n\}$$

Ci sono ora due casi. Se $k = 0$ si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y=0\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{Y=0 \mid X=n\}\mathbb{P}\{X=n\} = \mathbb{P}\{Y=0 \mid X=0\}\mathbb{P}\{X=0\} + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{Y=0 \mid X=n\}\mathbb{P}\{X=n\} = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{2}\right)^n\end{aligned}$$

mentre se $k \geq 1$ si ha

$$\mathbb{P}\{Y=k\} = \alpha \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{2}\right)^n$$

4. Se $k = 0$ si ha che

$$\mathbb{P}\{Y=0\} = 1 - \frac{\alpha p}{1-p} + \alpha \frac{\frac{p}{2}}{1-\frac{p}{2}} = 1 - \frac{\alpha \frac{p}{2}}{(1-p)(1-\frac{p}{2})}$$

Esercizio 3.

1. Abbiamo $X := |X_1| + |X_2|$, dove $(X_1, X_2) \sim U([-1.5; 1.5]^2)$, quindi $X_1, X_2 \sim U(-1.5; 1.5)$ e sono indipendenti tra di loro. Allora il loro valore assoluto ha legge $U(0; 1.5)$; difatti per ogni $t \in (0, 1.5)$ si ha

$$F_{|X_i|}(t) = \mathbb{P}\{|X_i| \leq t\} = \mathbb{P}\{-t \leq X_i \leq t\} = \frac{2}{3}t$$

Allora la densità è data da

$$f_{|X_i|}(t) = F'_{|X_i|}(t) = \frac{2}{3}\mathbf{1}_{\{0 \leq t \leq 1.5\}}$$

e quindi, siccome $|X_1|$ e $|X_2|$ sono indipendenti, X è una variabile aleatoria continua la cui densità è data dal prodotto di convoluzione

$$f_X(t) = (f_{|X_1|} * f_{|X_2|})(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{3}\mathbf{1}_{\{0 \leq z \leq 1.5\}} \frac{2}{3}\mathbf{1}_{\{0 \leq t-z \leq 1.5\}}\, dz = \int_{(0;1.5)\cap(t-1.5;t)} \frac{4}{9}\, dz$$

e quindi

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{4}{9}t & \text{se } 0 \leq t \leq 1.5, \\ \frac{4}{9}(3-t) & \text{se } 1.5 \leq t \leq 3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Abbiamo

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ \frac{2}{9}t^2 & \text{se } 0 \leq t \leq 1.5, \\ \frac{4}{3}t - \frac{2}{9}t^2 - 1 & \text{se } 1.5 \leq t \leq 3, \\ 1 & \text{se } t \geq 3. \end{cases}$$

che si può ottenere o calcolando l'integrale oppure con considerazioni geometriche.

3. Per le proprietà di speranza e varianza, ricordandosi che $|X_1|$ e $|X_2|$ sono indipendenti, abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[|X_1| + |X_2|] = \mathbb{E}[|X_1|] + \mathbb{E}[|X_2|] = \frac{1.5}{2} + \frac{1.5}{2} = 1.5, \\
\text{Var}\,[X] &= \text{Var}\,[|X_1|] + \text{Var}\,[|X_2|] = \frac{1.5^2}{12} + \frac{1.5^2}{12} = \frac{3}{8} = 0.375
\end{aligned}$$

4. Supponiamo che Y abbia la stessa legge di X e che le due variabili aleatorie siano indipendenti tra di loro, e definiamo $Z := \max(X, Y)$. Allora Z è una variabile aleatoria a valori in $(0, 3)$, e quindi per ogni $t \in (0, 3)$ si ha

$$F_Z(t) = \mathbb{P}\{X \le t, Y \le t\} = \mathbb{P}\{X \le t\}\mathbb{P}\{Y \le t\} = F_X(t)^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0, \\ \frac{2}{9}t^2 & \text{se } 0 \le t \le 1.5, \\ \frac{4}{3}t - \frac{2}{9}t^2 - 1 & \text{se } 1.5 \le t \le 3, \\ 1 & \text{se } t \ge 3. \end{cases}$$

dove abbiamo usato l'indipendenza di X e Y. La densità si ottiene derivando:

$$f_Z(t) = F_Z'(t) = \begin{cases} \frac{16}{81}t^3 & \text{se } 0 \le t \le 1.5, \\ 2\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{9}t\right)\left(\frac{4}{3}t - \frac{2}{9}t^2 - 1\right) & \text{se } 1.5 \le t \le 3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 4.

1. Dato che le X_i, e quindi $\log X_i$, sono variabili aleatorie con un numero finito di possibili stati, sicuramente $X_i, \log X_i \in L^p$ per ogni $p \geq 1$. Allora

$$\mathbb{E}[\log X_i] = \sum_{n=1}^{6} \log n \mathbb{P}\{X_i = n\} = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6} \log n = \frac{1}{6}\log 6! = 1.096542$$

(0.476222 in base 10)

2. Analogamente

$$\mathbb{E}[\log^2 X_i] = \sum_{n=1}^{6} \log^2 n \mathbb{P}\{X_i = n\} = 1.568318$$

e quindi

$$\mathrm{Var}\,[\log X_i] = \mathbb{E}[\log^2 X_i] - \mathbb{E}[\log X_i]^2 = 1.568318 - 1.096542^2 = 0.365914$$

(0.069016 in base 10)

3. Siccome possiamo ritenere che le $(X_i)_i$ siano indipendenti, allora anche $(\log X_i)_i$ lo sono, e quindi siamo sotto le ipotesi dell'approssimazione normale:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\prod_{i=1}^{100} X_i \leq a^{100}\right\} &= \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{100} \log X_i \leq 100\log a\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} \log X_i \leq \log a\right\} = \\
&= \mathbb{P}\left\{\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}\log X_i - \mathbb{E}[\log X_i]}{\sqrt{\frac{\mathrm{Var}\,[\log X_i]}{100}}} \leq \frac{\log a - \mathbb{E}[\log X_i]}{\sqrt{\frac{\mathrm{Var}\,[\log X_i]}{100}}}\right\} \simeq \\
&\simeq N\left(\frac{\log a - \mathbb{E}[\log X_i]}{\frac{\sqrt{\mathrm{Var}\,[\log X_i]}}{10}}\right) = N\left(\frac{\log a - 1.096542}{0.0604908}\right)
\end{aligned}$$

$N(\frac{\log a - 0.476222}{0.0262708})$ in base 10

4. Si ha che

$$N\left(\frac{\log a - 1.096542}{0.0604908}\right) = \frac{1}{2}$$

se e solo se $\log a - 1.096542 = \log a - \mathbb{E}[\log X_i] = \log a - \frac{1}{6}\log 6! = 0$, cioè se e solo se $a = \sqrt[6]{6!} = 2.993795$.

Esame di Calcolo delle Probabilità del 3 aprile 2007
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Hanno superato la prova:

Bacco Andrea	$16.5 + 3^{+}$
Bertolini Maria Chiara	$15 + 3^{-}$
Busetto Enrico	$15 + 3^{+}$
Consarino Maria	$14.5 + 3^{+}$
Correzzola Massimo	$19.5 + 3^{+}$
Dall'Ara Gianmaria	$26.5 + 3^{+}$
Fantini Lorenzo	$28 + 3^{+}$
Gemin Stefano	$24.5 + 3^{-}$
Pastro Valerio	$19 + 3^{-}$
Pellegrini Jacopo	$15 + 3^{+}$
Sambin Nicola	$27 + 3^{+}$
Scandiuzzi Enrico	18
Siviero Andrea	$23 + 3^{+}$
Tonincelli Michela	$14 + 3^{-}$
Trevisan Marialuisa	$15 + 3^{+}$
Zanibellato Andrea	$28 + 3^{+}$
Zordan Michele	$23.5 + 3^{-}$
Zottarel Angela	$23 + 3^{+}$

Visione compiti, registrazione voti e orali: giovedì 5 aprile ore 10 aula 1AD/30, oppure alle 15 stessa aula.
Verrà data precedenza alla registrazione voti a chi accetta il voto dello scritto e ha il bonus di + 3.