Esame di Probabilità e Statistica del 27 giugno 2007
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Siano A e B due eventi non trascurabili. Dire se ciascuno degli asserti che seguono è vero (i), falso (ii) o può essere vero (iii), giustificando la risposta con dimostrazioni e/o esempi.

1. Se A e B sono disgiunti, allora sono indipendenti.
2. Se A e B sono indipendenti, allora sono disgiunti.
3. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0.6$ e A e B sono disgiunti.
4. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0.6$ e A e B sono indipendenti.

Esercizio 2. Giocate una serie di partite ed avete probabilitá pari a p di vincerne ognuna, in modo indipendente l'una dall'altra. Avete programmato di giocarne 5, ma se vincete la quinta continuate a giocare fino alla prima sconfitta.

1. Si definisca, su un opportuno spazio probabilizzato, una variabile aleatoria corrispondente al numero di partite giocate.
2. Si definisca, sullo stesso spazio probabilizzato, una variabile aleatoria corrispondente al numero di partite perse.
3. Si calcolino i valori attesi delle partite giocate e delle partite perse.
4. Si calcolino le varianze delle partite giocate e delle partite perse.

Esercizio 3. Vogliamo costruire due centri assistenza veicoli su un'autostrada, che per semplicità supponiamo di lunghezza unitaria. Supponiamo che un veicolo che si guasta si trovi nella posizione X nell'autostrada, dove X è una variabile aleatoria di densità f_X su $[0, 1]$, e che il carro attrezzi possa uscire dal più vicino dei due centri, che si trovano nelle posizioni a e b, con $0 < a < b < 1$.

1. Dimostrare che la distanza media che il carro attrezzi percorrerà è uguale a $g(a, b) := E[\min(|X - a|, |X - b|)]$.
2. Calcolare $g(a, b)$ in termini di F_X, la funzione di ripartizione di X.
3. Dimostrare che la coppia (a^*, b^*) che minimizza $g(a, b)$ soddisfa le relazioni
$$2F_X(a) = F_X\left(\frac{b+a}{2}\right), \qquad 2F_X(b) - F_X\left(\frac{b+a}{2}\right) = 1$$
dove F_X è la funzione di ripartizione di X.
4. Se $f_X \equiv 1$ su $[0, 1]$ (cioè se $X \sim U(0, 1)$), trovare la coppia (a^*, b^*) che minimizza $g(a, b)$.

Esercizio 4. La riparazione di un'automobile richiede due fasi separate, delle quali la prima si distribuisce come una variabile aleatoria esponenziale di media 0.2 ore, e la seconda come una variabile aleatoria esponenziale di media 0.3 ore indipendente dalla precedente.

1. Calcolare media e varianza del tempo totale di riparazione di un'automobile.

2. Se un meccanico deve riparare 20 autovetture, si approssimi la probabilitá che l'intero lavoro possa essere completato entro 8 ore tramite la disuguaglianza di Cebicev.

3. Supponendo di poter applicare il teorema limite centrale, si determini il valore di t per il quale la probabilitá che il meccanico finisca le 20 riparazioni entro t ore sia approssimativamente uguale a 0.95.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. FALSO: difatti è sempre vero che $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, ma se A e B sono disgiunti allora $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, cioè $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$, poichè A e B sono non trascurabili.

2. FALSO: difatti si avrebbe $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$, quindi $A \cap B$ non può certo essere l'insieme vuoto.

3. FALSO: se A e B sono disgiunti, allora $1 = \mathbb{P}(\Omega) > \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0.6 + 0.6 = 1.2$, che è assurdo.

4. può essere vero: se difatti costruiamo $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$, con $\mathbb{P}\{1\} = 0.36$, $\mathbb{P}\{2\} = \mathbb{P}\{3\} = 0.24$ e $\mathbb{P}\{4\} = 0.16$, e poniamo $A := \{1, 2\}$ e $B := \{1, 3\}$, allora si hanno entrambe le proprietà. Può d'altronde anche essere falso: basta prendere $A = B$ di probabilità 0.6: si ha la prima parte, ma non la seconda poichè $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = 0.6 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.36$.

Esercizio 2. Un possibile modo di modellizzare il fenomeno è il seguente: consideriamo un processo di Bernoulli $(X_n)_{n\geq 1}$ di parametro $1 - p$ su un opportuno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dove $X_n = 1$ se l'n-esima partita risulta in una sconfitta.

1. Giochiamo sicuramente 4 partite più un numero corrispondente a

$$T := \inf\{n \geq 1 \mid X_{n+4} = 1\}$$

Siccome le variabili aleatorie $(X_n)_{n\geq 5}$, usate nella definizione di T, sono i.i.d. $\sim Be(1-p)$, da questo segue che $T \sim Ge(1 - p)$. Allora il numero di partite giocate è uguale a $N := 4 + T$, dove $T \sim Ge(1 - p)$.

2. Il numero di partite perse può essere espresso come

$$P := \sum_{n=1}^{N} X_n = \sum_{n=1}^{4} X_n + \sum_{n=4+1}^{4+T} X_n$$

Ricordiamo che $T < +\infty$ quasi certamente, e che per definizione si ha $X_5 = X_6 = \ldots = X_{4+T-1} = 0$, $X_{4+T} = 1$, quindi $\sum_{n=4+1}^{4+T} X_n = 1$ quasi certamente. Questo significa che $P = \sum_{n=1}^{4} X_n + 1$, con $\sum_{n=1}^{4} X_n \sim B(4, 1 - p)$.

3. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] &= \mathbb{E}[4 + T] = 4 + \mathbb{E}[T] = 4 + \frac{1}{1-p}, \\
\mathbb{E}[P] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{4} X_n + 1\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{4} X_n\right] + 1 = 4(1 - p) + 1
\end{aligned}$$

4. Siccome la varianza non viene modificata da costanti additive, calcoliamo:

$$\begin{aligned} \text{Var}\,[N] &= \text{Var}\,[4+T] = \text{Var}\,[T] = \frac{p}{(1-p)^2}, \\ \text{Var}\,[P] &= \text{Var}\,\left[\sum_{n=1}^{4} X_n + 1\right] = \text{Var}\,\left[\sum_{n=1}^{4} X_n\right] = 4p(1-p) \end{aligned}$$

Esercizio 3.

1. Se il veicolo si trova in posizione X, il primo centro dista $|X-a|$ e il secondo $|X-b|$, quindi il più vicino dista $\min(|X-a|, |X-b|)$, la cui media è $\mathbb{E}[\min(|X-a|, |X-b|)]$.

2. Tramite l'integrazione per parti

$$\int_\alpha^\beta x f_X(x)\, dx = [xF_X(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F_X(x)\, dx$$

e ricordando che, poichè X è concentrata su $[0,1]$ si deve avere che $F_X(0) = 0$, $F_X(1) = 1$, si ottiene:

$$\begin{aligned} g(a,b) &= \int_0^1 \min(|x-a|, |x-b|) f_X(x)\, dx = \\ &= \int_0^a (a-x) f_X(x)\, dx + \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a) f_X(x)\, dx + \\ &\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x) f_X(x)\, dx + \int_b^1 (x-b) f_X(x)\, dx = \\ &= \int_0^a F_X(x)\, dx - \int_a^{\frac{a+b}{2}} F_X(x)\, dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b F_X(x)\, dx - \int_b^1 F_X(x)\, dx + 1 - b \end{aligned}$$

3. Calcolando le derivate parziali di f, si ha:

$$\begin{aligned} g_a(a,b) &= F_X(a) - \frac{1}{2} F_X\left(\frac{a+b}{2}\right) + F_X(a) - \frac{1}{2} F_X\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2F_X(a) - F_X\left(\frac{a+b}{2}\right), \\ g_b(a,b) &= -\frac{1}{2} F_X\left(\frac{a+b}{2}\right) + F_X(b) - \frac{1}{2} F_X\left(\frac{a+b}{2}\right) + F_X(b) - 1 = \\ &= 2F_X(b) - F_X\left(\frac{a+b}{2}\right) - 1 \end{aligned}$$

Supponendo che esistano punti di minimo locali, ponendo le derivate parziali uguali a 0 si ha la tesi.

4. Se $X \sim U(0,1)$, allora $F_X(x) = x$ per ogni $x \in [0,1]$. Allora le due relazioni diventano

$$\begin{cases} 2a = \dfrac{b+a}{2}, \\ \\ 2b - \dfrac{b+a}{2} = 1 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione la coppia $(a,b) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

Esercizio 4.

1. Chiamiamo X_i e Y_i i tempi di riparazione rispettivamente alla fase 1 e 2 per l'i-esima automobile. Allora $X_i \sim Exp(\mu_X)$, e $Y_i \sim Exp(\mu_Y)$, con $\mu_X = 1/0.2 = 5$ e $\mu_Y = 1/0.3 = 3.33$. Allora il tempo totale di riparazione di un'automobile si puó definire come $Z_i := X_i + Y_i$, e ricordando che X_i e Y_i sono indipendenti si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_i] &= \mathbb{E}[X_i] + \mathbb{E}[Y_i] = \frac{1}{\mu_X} + \frac{1}{\mu_Y} = 0.2 + 0.3 = 0.5, \\ \mathrm{Var}\,[Z_i] &= \mathrm{Var}\,[X_i] + \mathrm{Var}\,[Y_i] = \frac{1}{\mu_X^2} + \frac{1}{\mu_Y^2} = 0.2^2 + 0.3^2 = 0.13 \end{aligned}$$

2. Innanzitutto definiamo $Z := \sum_{i=1}^{20} Z_i$. Siccome è sensato supporre che le $(Z_i)_i$ siano indipendenti, abbiamo

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{i=1}^{20} \mathbb{E}[Z_i] = 20 \cdot 0.5 = 10, \qquad \mathrm{Var}\,[Z] = \sum_{i=1}^{20} \mathrm{Var}\,[Z_i] = 20 \cdot 0.13 = 2.6$$

   Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Z \le 8\} &= \mathbb{P}\{Z - 10 \le 8 - 10\} = \mathbb{P}\{Z - 10 \le -2\} \le \\ &\le \mathbb{P}\{|Z - 10| \ge 2\} \le \frac{\mathrm{Var}\,[Z]}{2^2} = \frac{2.6}{4} = 0.65 \end{aligned}$$

3. Abbiamo

$$\begin{aligned} 0.95 &= \mathbb{P}\{Z \le t\} = \mathbb{P}\left\{\frac{Z - \mathbb{E}[Z]}{\sqrt{\mathrm{Var}\,[Z]}} \le \frac{t - \mathbb{E}[Z]}{\sqrt{\mathrm{Var}\,[Z]}}\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{Z - 10}{\sqrt{2.6}} \le \frac{t - 10}{\sqrt{2.6}}\right\} \simeq \\ &\simeq \Phi\left(\frac{t - 10}{\sqrt{2.6}}\right) \end{aligned}$$

   dove Φ è la funzione di ripartizione di una normale standard. Chiamando q_α il suo quantile di ordine α, abbiamo

$$\frac{t - 10}{\sqrt{2.6}} \simeq q_{0.95} = 1.64$$

   e infine

$$t \simeq \sqrt{2.6} \cdot q_{0.95} + 10 = 12.64$$

Esame di Probabilità e Statistica del 27 giugno 2007
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Hanno superato la prova:

Pastro Valerio	$17.5 + 3^-$
Scipioni Elisa Fortunata	$21 + 3^+$

Visione compiti, registrazione voti e orali: lunedì 2 luglio ore 17.30 nel mio studio.
Verrà data precedenza alla registrazione voti a chi accetta il voto dello scritto e ha il bonus di + 3.