Esame di Probabilità e Statistica del 9 luglio 2007
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Si supponga che il 5% degli uomini e lo 0.25% delle donne siano daltonici. Supponiamo all'inizio che vi sia lo stesso numero di uomini e di donne.

1. Qual è la percentuale di daltonici (uomini e donne) nella popolazione totale?
2. Se si sceglie a caso un daltonico, qual è la probabilità che questo sia un uomo?

Supponiamo ora che gli uomini siano il doppio delle donne.

3. Qual è la percentuale di daltonici nella popolazione totale?
4. Se si sceglie a caso un daltonico, qual è la probabilità che stavolta sia una donna?

Esercizio 2. Un dado non truccato è lanciato successivamente. Siano X e Y, rispettivamente, il numero di lanci necessari per ottenere un 6 e un 5. Determinare:

1. le leggi marginali di X e Y;
2. la legge congiunta di (X, Y);
3. $\mathbb{E}[X]$;
4. $\mathbb{E}[X \mid Y = 1]$.

Esercizio 3. La densità congiunta di X e Y è data da

$$f(x, y) := \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), \qquad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$$

1. Verificare che è effettivamente una densità.
2. Calcolare le densità marginali di X e Y.
3. Calcolare $\mathbb{E}[X]$ ed $\mathbb{E}[Y]$.
4. Calcolare $\mathbb{P}\{X > Y\}$.

Esercizio 4. Si supponga che il peso (in tonnellate) di un autoveicolo si distribuisca come una variabile aleatoria di media 3 e deviazione standard 0.3. Nel seguito, supporremo di poter applicare l'approssimazione normale.

1. Se consideriamo n autoveicoli, con che variabile aleatoria possiamo approssimare il peso totale?
2. Supponiamo che la portata della campata di un ponte sia 400 tonnellate, prima di riportare danni strutturali. Quanti veicoli ci possono transitare contemporaneamente affinchè la probabilità che si possa danneggiare non superi 0.1.
3. Rispondere alla stessa domanda supponendo che la portata della campata sia una variabile aleatoria di media 400 e di deviazione standard 40.

Soluzioni

Esercizio 1. Definiamo gli eventi

$$D := \{\text{daltonico}\}, \qquad M := \{\text{uomo}\}, \qquad F := \{\text{donna}\},$$

dove ovviamente abbiamo $M \cup F = \Omega$, $M \cap F = \emptyset$. Allora i dati si possono riscrivere così:

$$\mathbb{P}(D|M) = 0.05, \qquad \mathbb{P}(D|F) = 0.0025.$$

1. Abbiamo come ipotesi che $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(F) = 0.5$. Allora usando la formula della probabilità totale calcoliamo

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(D|F)\mathbb{P}(F) = 0.05 \cdot 0.5 + 0.0025 \cdot 0.5 = 0.02625 = \frac{21}{800}$$

2. Usando la formula di Bayes, la probabilità richiesta è:

$$\mathbb{P}(M|D) = \frac{\mathbb{P}(D|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0.05 \cdot 0.5}{0.02625} = 0.9523 = \frac{20}{21}$$

3. Stavolta abbiamo come ipotesi che $\mathbb{P}(M) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(F) = \frac{1}{3}$. Allora usando la formula della probabilità totale calcoliamo

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(D|F)\mathbb{P}(F) = 0.05 \cdot 0.666 + 0.0025 \cdot 0.333 = 0.03416 = \frac{41}{1200}$$

4. Usando la formula di Bayes, la probabilità richiesta stavolta è:

$$\mathbb{P}(F|D) = \frac{\mathbb{P}(D|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0.0025 \cdot 0.333}{0.03416} = 0.02439 = \frac{1}{41}$$

Esercizio 2. Un possibile modo di modellizzare il fenomeno è il seguente: consideriamo una successione di variabili aleatorie indipendenti $(Z_n)_n$ con legge uniforme sull'insieme $\{1, \dots, 6\}$, e definiamo

$$X := \inf\{n \geq 1 \mid Z_n = 6\}, \qquad Y := \inf\{n \geq 1 \mid Z_n = 5\}$$

1. È noto che X e Y hanno entrambelegge geometrica di parametro $p := \mathbb{P}\{Z_n = 6\} = \mathbb{P}\{Z_n = 5\} = \frac{1}{6}$.

2. Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}\{X = h, Y = k\}$ per $h, k \geq 1$. Abbiamo tre casi. Se $h = k$, allora

$$\mathbb{P}\{X = Y = k\} = \mathbb{P}\{Z_1 \notin \{5,6\}, \dots, Z_{k-1} \notin \{5,6\}, Z_k = 5, Z_k = 6\} = 0$$

poichè l'evento è impossibile. Da questo risulta subito che X e Y non possono essere indipendenti. Se $h > k$, abbiamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{X = h, Y = k\} = \\
&= \mathbb{P}\{Z_1 \notin \{5,6\}, \dots, Z_{k-1} \notin \{5,6\}, Z_k = 5, Z_{k+1} \neq 6, \dots, Z_{h-1} \neq 6, Z_h = 6\} = \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{h-k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'indipendenza delle $(Z_n)_n$. Se $h < k$, con conti analoghi arriviamo a $\mathbb{P}\{X = h, Y = k\} = \left(\frac{2}{3}\right)^{h-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-h-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2$.

3. Per le proprietà della legge geometrica, abbiamo che $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{p} = 6$.

4. Intuitivamente, l'evento $\{Y = 1\}$ è uguale all'evento $\{Z_1 = 5\}$, che implica $\{X > 1\}$. Per la proprietà di assenza di memoria della legge geometrica, sappiamo che la legge di $X - 1$ condizionata a $\{X > 1\}$ è ancora $Ge(p)$, e quindi la media di $X = X - 1 + 1$ sapendo che si è verificato $\{Y = 1\}$ è uguale a $1 + 6 = 7$.

   Questo ragionamento intuitivo viene confermato dai calcoli: difatti $\mathbb{E}[X \mid Y = 1] = \sum x p_{X|Y}(x|1)$, dove per ogni $x \geq 2$ abbiamo

$$p_{X|Y}(x|1) = \frac{p_{XY}(x,1)}{p_Y(1)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{1-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{1-1}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-2}\cdot\frac{1}{6}$$

   e per $x = 1$ abbiamo $p_{X|Y}(1|1) = \frac{p_{XY}(1,1)}{p_Y(1)} = 0$; quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \mid Y = 1] &= \sum_{x\geq 2} x\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x-2}\cdot\frac{1}{6} = \sum_{x\geq 1} x\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x-2}\cdot\frac{1}{6} - 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{6} = \\ &= \frac{6}{5}\sum_{x\geq 1} x\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}\cdot 6 - \frac{1}{5} = \frac{35}{5} = 7\end{aligned}$$

Esercizio 3.

1. Bisogna calcolare

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^2 \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right)\,dy\,dx &= \int_0^1\left[\frac{6}{7}\left(x^2y + \frac{1}{4}xy^2\right)\right]_0^2\,dx = \int_0^1\left(\frac{12}{7}x^2 + \frac{6}{7}x\right)\,dx = \\ &= \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 1\end{aligned}$$

2. Per ogni $x \in [0,1]$ abbiamo

$$f_X(x) = \int_0^2 \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right)\,dy = \frac{12}{7}x^2 + \frac{6}{7}x$$

   e per ogni $y \in [0,2]$ abbiamo

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right)\,dx = \frac{2}{7} + \frac{3}{14}y$$

3. Poichè sia X che Y sono limitate, appartengono entrambe ad L^1, e possiamo calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \int_0^1\left(\frac{12}{7}x^3 + \frac{6}{7}x^2\right) = \frac{5}{7}, \\ \mathbb{E}[Y] &= \int_0^2 y f_Y(y)\,dy = \int_0^2\left(\frac{2}{7}y + \frac{3}{14}y^2\right) = \frac{8}{7},\end{aligned}$$

4. Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X > Y\} &= \mathbb{P}\{0 < Y < X < 1\} = \iint_{0<y<x<1} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \\ &= \int_0^1\left(\frac{6}{7}x^3 + \frac{3}{14}x^3\right)\,dx = \frac{15}{56}\end{aligned}$$

Esercizio 4.

1. Chiamiamo X_i il peso dell'i-esimo veicolo. Allora $\mathbb{E}[X_i] = 3$, Var $[X_i] = 0.3^2$, ed è ragionevole supporre che le $(X_i)_i$ siano indipendenti. Se consideriamo n veicoli, allora il loro peso totale sarà uguale a $T := \sum_{i=1}^n X_i$, e quindi sicuramente $\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = 3n$, e Var $[T] = \sum_{i=1}^n$ Var $[X_i] = 0.3^2 n$. Se ora supponiamo di poter utilizzare l'approssimazione normale, allora possiamo approssimare la legge di T con una normale $N(3n, 0.09n)$.

2. Calcoliamo
$$0.1 \geq \mathbb{P}\{T > 400\} = \mathbb{P}\left\{\frac{T-3n}{0.3\sqrt{n}} > \frac{400-3n}{0.3\sqrt{n}}\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\frac{T-3n}{0.3\sqrt{n}} \leq \frac{400-3n}{0.3\sqrt{n}}\right\} \simeq$$
$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{400-3n}{0.3\sqrt{n}}\right)$$
quindi
$$\Phi\left(\frac{400-3n}{0.3\sqrt{n}}\right) \geq 0.9$$
che significa
$$\frac{400-3n}{0.3\sqrt{n}} \geq q_{0.9} = 1.28$$
che, svolgendo i calcoli, diventa
$$n + 0.128\sqrt{n} - 133.3 \leq 0$$
L'equazione associata ha una radice negativa ed una positiva, quest'ultima uguale a $\sqrt{n} = 11.48$, quindi la relazione del punto 2. è soddisfatta per $0 \leq \sqrt{n} \leq 11.48$, cioè per $0 \leq n \leq 131.8$. In altre parole, il massimo numero di veicoli che possono transitare contemporaneamente sul ponte è 131.

3. Definiamo $X \sim N(400, 40^2)$ indipendente da T. Allora la legge di $T - X$ si può approssimare con una legge $N(3n - 400, 0.09n + 40^2)$. Dobbiamo ora calcolare
$$0.1 \geq \mathbb{P}\{T > X\} = \mathbb{P}\{T - X > 0\} = \mathbb{P}\left\{\frac{T - X - (3n-400)}{\sqrt{0.09n + 1600}} > \frac{400-3n}{\sqrt{0.09n+1600}}\right\} =$$
$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{400-3n}{\sqrt{0.09n+1600}}\right)$$
quindi
$$\Phi\left(\frac{400-3n}{\sqrt{0.09n+1600}}\right) \geq 0.9$$
che, svolgendo i calcoli, diventa
$$400 - 3n \geq q_{0.9}\sqrt{0.09n + 1600} = 1.28\sqrt{0.09n+1600}$$
Imponendo che $400 - 3n \geq 0$, cioè che $n \leq \frac{400}{3} = 166$, si possono elevare entrambi i membri al quadrato, e si ottiene
$$n^2 - 266.68n + 17486.51 \geq 0$$
L'equazione associata ha due radici positive, uguali rispettivamente a 116.21 e 150.47, quindi sia gli $n \leq 116$ che gli $n \geq 151$ sono soluzioni. Imponendo anche la condizione $n \leq 166$, si ottiene che bisogna per forza avere $n \leq 116$.

Esame di Probabilità e Statistica del 9 luglio 2007
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Hanno superato la prova:

Bernardi Cinzia	17
Bertiato Maria	$16 + 3^-$
Bovo Serena	$15.5 + 3^+$
Chiminazzo Arianna	18
Consarino Maria	$20.5 + 3^+$
Dalla Torre Jessica	$17 + 3^+$
Ferro Daniele	$20 + 3^+$
Gazzi Rebecca	20
Mason Alessandra	17.5
Parolin Catia	$18 + 3^+$
Pastro Valerio	$26.5 + 3^-$
Xausa Ilaria	20

Visione compiti, registrazione voti e orali: mercoledì 11 luglio ore 17.30 aula 2AB/40.
Verrà data precedenza alla registrazione voti a chi accetta il voto dello scritto e ha il bonus di + 3.