Esame di Probabilità e Statistica del 21 luglio 2009
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Siano $A_1,\ldots,A_n$ eventi in uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Dimostrare che se A_1 e A_2 sono tali che $A_1 \cup A_2 = \Omega$, allora $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - 1$.

2. Dimostrare che se A_1 e A_2 sono eventi generici, allora in generale $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \geq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - 1$.

3. Dimostrare che se $A_1,\ldots,A_n$ sono eventi generici, allora in generale vale la seguente **disuguaglianza di Bonferroni**:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1)$$

4. Dimostrare che se $A_1,\ldots,A_n$ sono tali che $A_i \cup A_j = \Omega$ per ogni $i \neq j$, allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1)$$

Esercizio 2. Una compagnia di soldati è formata da 500 uomini e ognuno in modo indipendente dagli altri può avere una certa malattia con probabilità 10^{-3}. Questa malattia può essere rilevata con un esame del sangue, e si decide di fare un prelievo a tutti i soldati e, mescolati i campioni, fare un unico test.

1. Qual è la probabilità che il test del sangue risulti positivo (e che quindi almeno uno dei soldati sia malato)?

2. Supponiamo ora che il test abbia dato esito positivo. Qual è la probabilità che ci sia più di un soldato malato?

3. Supponiamo che il soldato Pieri sappia già di avere la malattia. Qual è la probabilità, secondo lui, che ci sia qualche altro malato?

Esercizio 3. Un prodotto, vendibile in quantità continua, porta ad un profitto netto di $b > 0$ per ogni data unità di misura venduta e ad una perdita $-\ell < 0$ per ogni unità invenduta alla fine della stagione. La quantità di prodotto venduta in una stagione in un negozio è una variabile aleatoria X con densità f_X. Il negozio, all'inizio della stagione, deve decidere la quantità N (non necessariamente intera) di prodotto da comprare.

1. Dimostrare che il guadagno alla fine della stagione è
$$Y := (-N\ell + (b+\ell)X)\mathbf{1}_{\{X \le N\}} + Nb\mathbf{1}_{\{X>N\}}$$
dove $\mathbf{1}_A$ è la funzione indicatrice dell'evento $A \in \mathcal{A}$.

2. Dimostrare che
$$\mathbb{E}[Y] = Nb - N(\ell + b)F_X(N) + (b+\ell)\int_0^N x f_X(x)\, dx$$
dove F_X è la funzione di ripartizione di X.

3. Dimostrare che la quantità N che massimizza il guadagno è N^* tale che
$$F_X(N^*) = \frac{b}{b+\ell}$$

4. Calcolare N^* nel caso $X \sim Exp(\lambda)$.

Esercizio 4. $n = 50$ numeri reali sono arrotondati all'intero più vicino e poi sommati; supponiamo che l'errore di arrotondamento per ogni numero sia una variabile aleatoria $X_i \sim U(-0.5; 0.5)$, e che queste variabili aleatorie siano indipendenti. Definiamo l'errore totale come $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Qual è la media di S_n?

2. Qual è la varianza di S_n?

3. Stimare $\mathbb{P}\{|S_n| > 3\}$.

Valori utili della funzione di ripartizione di una normale standard:
$$\Phi(0.72) = 0.76424, \qquad \Phi(1.47) = 0.92922, \qquad \Phi(6.12) = 0.99999$$

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Se $A_1 \cup A_2 = \Omega$, allora per l'identità di De Morgan si ha $(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c = \emptyset$, e quindi, sfruttando l'additività,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= 1 - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2)^c) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cup A_2^c) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c) - \mathbb{P}(A_2^c) = \\ &= 1 - 1 + \mathbb{P}(A_1) - 1 + \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - 1 \end{aligned}$$

2. Se non si può sfruttare l'additività, sfruttando la subadditività di $\mathbb{P}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= 1 - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2)^c) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cup A_2^c) \geq \\ &\geq 1 - \mathbb{P}(A_1^c) - \mathbb{P}(A_2^c) = 1 - 1 + \mathbb{P}(A_1) - 1 + \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - 1 \end{aligned}$$

3. Analogamente per $A_1, \dots, A_n$ generici eventi si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right) \geq \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c) = 1 - \sum_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_i)) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - n + 1 \end{aligned}$$

4. Sotto l'ipotesi, si ha che gli $(A_i^c)_i$ sono eventi disgiunti, e quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right) = \\ &= 1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c) = 1 - \sum_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_i)) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - n + 1 \end{aligned}$$

Esercizio 2. Rappresentiamo ogni soldato con una $X_i \sim Be(p)$, $i = 1, \dots, n = 500$, con $p = 10^{-3}$, dando a 1 il significato di "soldato malato"; possiamo supporre che le $(X_i)_i$ siano indipendenti. Allora $S_n := \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n,p)$. Poichè $n > 100$ e $p < 0.01$, possiamo anche usare l'approssimazione di Poisson.

1. Approssimiamo $S_{500} \approx Po(\lambda)$, con $\lambda = 500 \cdot 0.001 = 0.5$; allora

$$\mathbb{P}\{S_{500} \geq 1\} = 1 - \mathbb{P}\{S_{500} = 0\} \simeq 1 - e^{-0.5} = 0.39347$$

2. Dobbiamo ora calcolare

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_{500} \geq 2 | S_{500} \geq 1\} &= \frac{\mathbb{P}\{S_{500} \geq 2, S_{500} \geq 1\}}{\mathbb{P}\{S_{500} \geq 1\}} = \frac{\mathbb{P}\{S_{500} \geq 2\}}{\mathbb{P}\{S_{500} \geq 1\}} = \\ &= \frac{1 - \mathbb{P}\{S_{500} = 0\} - \mathbb{P}\{S_{500} = 1\}}{\mathbb{P}\{S_{500} = 0\}} \simeq \frac{1 - e^{-0.5} - e^{-0.5} \cdot 0.5}{1 - e^{-0.5}} = 0.22925 \end{aligned}$$

3. Supponiamo, per semplicità di notazione, che il soldato Pieri sia l'ultimo: lui sa quindi che $X_{500} = 1$, e di conseguenza la probabilità che lui calcola è

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{S_{500} \geq 2 | S_{500} \geq 1, X_{500} \geq 1\} &= \frac{\mathbb{P}\{S_{500} \geq 2, S_{500} \geq 1, X_{500} \geq 1\}}{\mathbb{P}\{S_{500} \geq 1, X_{500} \geq 1\}} = \\
= \frac{\mathbb{P}\{S_{500} \geq 2, X_{500} \geq 1\}}{\mathbb{P}\{X_{500} \geq 1\}} &= \frac{\mathbb{P}\{S_{499} \geq 1, X_{500} \geq 1\}}{\mathbb{P}\{X_{500} \geq 1\}} = \mathbb{P}\{S_{499} \geq 1 | X_{500} \geq 1\} = \\
= \mathbb{P}\{S_{499} \geq 1\} &= 1 - \mathbb{P}\{S_{499} = 0\} = 1 - e^{-0.499} = 0.39286
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato l'indipendenza delle $(X_i)_i$ e il fatto che $S_{499} \approx Po(\lambda')$, con $\lambda' := 499 \cdot 0.001 = 0.499$.

Esercizio 3.

1. Se $X > N$, allora posso vendere solo una quantità N con guadagno b, quindi il guadagno totale è Nb. Se invece $X \leq N$, allora venderò una quantità X con guadagno b e l'invenduto sarà $N - X$, con perdita $-\ell$, quindi in questo caso avrò $Xb - (N - X)\ell = X(b + \ell) - N\ell$. Complessivamente possiamo quindi scrivere che il guadagno totale è

$$
Y := (-\ell N + (b + \ell)X)\mathbf{1}_{\{X \leq N\}} + bN\mathbf{1}_{\{X > N\}}
$$

2. Innanzitutto Y è q.c. limitata: difatti, se $X \in [0, N]$, allora $Y = -\ell N + (b + \ell)X \in [-\ell N, bN]$; se invece $X > N$, allora $Y = bN$. Questo implica che la speranza esiste finita. Notando poi che, per il significato di X, è sensato supporre che $X \geq 0$ q.c., calcoliamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[(-N\ell + (b + \ell)X)\mathbf{1}_{\{X \leq N\}} + Nb\mathbf{1}_{\{X > N\}}] = \\
&= -N\ell\mathbb{P}\{X \leq N\} + (b + \ell)\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X \leq N\}}] + Nb\mathbb{P}\{X > N\} = \\
&= -N\ell F_X(N) + (b + \ell)\int_{\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{(-\infty, N]}(x) f_X(x)\, dx + Nb(1 - \mathbb{P}\{X \leq N\}) = \\
&= -N\ell F_X(N) + (b + \ell)\int_0^N x f_X(x)\, dx + Nb - NbF_X(N) = \\
&= Nb - N(b + \ell)F_X(N) + (b + \ell)\int_0^N x f_X(x)\, dx
\end{aligned}
$$

3. Calcolando la derivata prima rispetto ad N di $\mathbb{E}[X]$, otteniamo:

$$
\frac{d\mathbb{E}[Y]}{dN} = b - (b + \ell)F_X(N) - N(b + \ell)f_X(N) + (b + \ell)Nf_X(N) = b - (b + \ell)F_X(N)
$$

Siccome $F_X(N)$ è continua e non decrescente e $F_X(0) = \mathbb{P}\{X \leq 0\} = 0$, $\lim_{N \to +\infty} F_X(N) = 1$, allora $\frac{d\mathbb{E}[Y]}{dN}|_{N=0} = b > 0$, $\lim_{N \to +\infty} \frac{d\mathbb{E}[Y]}{dN} = b - (b + \ell) = -\ell < 0$. Questo significa che la derivata prima è continua, non crescente e positiva in 0 e negativa in un intorno di $+\infty$, quindi deve esistere (almeno) un punto N^* tale che $\frac{d\mathbb{E}[Y]}{dN}|_{N=N^*} = 0$, che sarà tale che $b = (b + \ell)F_X(N^*)$, cioè $F_X(N^*) = \frac{b}{b+\ell}$: questi punti N^* saranno di massimo globale.

4. Se $X \sim Exp(\lambda)$, allora $F_X(N) = 1 - e^{-\lambda N}$, e quindi imponendo
$$F_X(N^*) = 1 - e^{-\lambda N^*} = \frac{b}{b+\ell}$$
si arriva a
$$N^* = \frac{1}{\lambda} \log \frac{\ell + b}{\ell} = \frac{1}{\lambda} \log \left(1 + \frac{b}{\ell}\right)$$

Esercizio 4. Innanzitutto notiamo che $\mathbb{E}[X_i] = 0.5 - 0.5 = 0$, $\text{Var}\ [X_i] = \frac{(0.5+0.5)^2}{12} = \frac{1}{12}$.

1. Usando la linearità della speranza, abbiamo
$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n \cdot 0 = 0$$

2. Usando l'indipendenza delle $(X_i)_i$, abbiamo
$$\text{Var}\ [S_n] = \text{Var}\ \left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}\ [X_i] = n\frac{1}{12} = \frac{50}{12} = \frac{25}{6} \simeq 4.1666$$

3. Supponendo che in questo caso $n = 50$ sia abbastanza grande da poter usare l'approssimazione normale, poichè S_n ha legge continua e simmetrica calcoliamo
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|S_n| > 3\} &= 2\mathbb{P}\{S_n > 3\} = 2\mathbb{P}\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\text{Var}\ [S_n]}} > \frac{3 - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\text{Var}\ [S_n]}}\right\} = 2\mathbb{P}\left\{S_n^* > \frac{3}{\sqrt{\frac{25}{6}}}\right\} = \\ &= 2\mathbb{P}\{S_n^* > 1.47\} = 2(1 - \mathbb{P}\{S_n^* \le 1.47\}) = 2(1 - \Phi(1.47)) = \\ &= 2(1 - 0.92922) = 2 \cdot 0.07078 = 0.14156\end{aligned}$$
dove Φ è la funzione di ripartizione di una legge $N(0,1)$. Notiamo che, essendo S_n continua, non si applica la correzione di continuità.

Esame di Calcolo delle Probabilità del 21 luglio 2009
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Hanno superato la prova:

Bacco Andrea	24.5
Baggio Andrea	29
Baldacci Giuditta	19
Basso Silvia	29.5
Bergamaschi Francesca	23
Boscolo Anna	24.5
Cecchetto Marco	22
Cimetta Leone Cesare	28
Ciucci Sara	23
Danieli Carlo	28
Daniotti Francesco	23
Durighetto Sara	17
Facco Elena	24
Favero Valentina	26
Gentile Mariano	18.5
Guarniero Pieralberto	29
Guglielmi Lorenzo	28
Guglielmo Silvia	17
Livieri Giulia	20.5
Lucchese Giacomo	22.5
Mancin Jacopo	28.5
Maragno Damiano	26.5
Montino Alessandro	26.5
Nardo Angela	17.5
Piovesan Teresa	28.5
Pressato Marta	28
Rossini Luca	21.5
Saltalamacchia Monica	24.5
Scantamburlo Andrea	19.5
Simonetti Helena	18
Sperotto Oliver	20.5
Tasinato Davide	28
Tessari Alessandro	27.5
Torossi Anna	25
Trevisiol Davide	18
Vitturi Marco	29.5
Zanchetta Federica	17
Zarattini Carlo	23.5
Zorzan Ilaria	19.5
Zuffellato Davide	23.5

Visione compiti, registrazione voti e orali: venerdì 24 luglio ore 10.00 aula da annunciare.