Esame di Probabilità e Statistica del 15 settembre 2009
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Negli anni '60 negli Stati Uniti un celebre gioco televisivo funzionava così. Il presentatore, Monty Hall, chiedeva di scegliere tra tre porte, una delle quali aveva un grosso premio dietro mentre le altre due non avevano niente. Dopodichè Monty Hall apriva una delle altre due porte in modo che il premio rimanesse in gioco, e chiedeva se si voleva tenere la porta o cambiare con l'altra.

1. All'inizio del gioco, qual è la probabilità che il premio sia dietro la porta A?
2. Supponiamo di fare A come scelta iniziale, e che Monty Hall apra un'altra porta, che non contiene il premio. Qual è la probabilità che il premio sia ancora sotto A?
3. Qual è la probabilità che il premio sia sotto l'altra porta rimasta?
4. Monty Hall, ora, ti dà l'opzione di cambiare la scelta e aprire l'altra porta. Ti conviene?

Giochiamo ora la seguente versione modificata. Ci sono due concorrenti: all'inizio uno dei due sceglie una porta, e subito dopo l'altro concorrente sceglie una delle due porte rimaste, potendo quindi anche trovare il premio. Se non lo trova, Monty Hall ti propone ancora di cambiare porta.

5. Qual è la probabilità che il secondo concorrente vinca? Qual è la probabilità che il premio sia sotto la porta rimasta?
6. Questa volta conviene esercitare l'opzione di cambiare porta offerta da Monty Hall?

Esercizio 2. Il tasso di mortalità per asma in Inghilterra nel periodo 1862–1962 era di 1 ogni 100.000 casi. Supponiamo che, su una popolazione di 1 milione, nel 1963 ci siano stati 20 casi di morte per asma. Vogliamo ora calcolare quanto (im)probabile sia quanto successo, cioè vogliamo calcolare la probabilità di avere 20 o più morti su 1 milione di individui, se veramente la percentuale di mortalità fosse di 1 su 100.000.

1. Definire opportune variabili aleatorie per scrivere, in modo matematico, la probabilità cercata, senza calcolarla.
2. Verificare se si può utilizzare l'approssimazione di Poisson.
3. Verificare se si può utilizzare l'approssimazione normale.
4. Calcolare la probabilità di cui sopra utilizzando l'approssimazione più opportuna.

Valori utili della funzione di ripartizione di una normale standard:

$$\Phi(1.00) = 0.84134, \quad \Phi(3.00) = 0.99865, \quad \Phi(3.16) = 0.99921, \quad \Phi(3.32) = 0.99955$$

Esercizio 3. Sia data la seguente densità di probabilità congiunta del vettore aleatorio (X, Y):

$$f_{X,Y}(x, y) := \frac{12}{5}x(2 - x - y)\mathbf{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x, y)$$

1. Verificare che è una densità di probabilità su $[0, 1] \times [0, 1]$.
2. Calcolare la densità marginale di X.
3. Calcolare la densità marginale di Y.
4. Le due variabili aleatorie sono indipendenti?

Esercizio 4. Il numero di auto vendute in un dato concessionario in una settimana è una variabile aleatoria X di media 16.

1. Dare un limite superiore alla probabilità che $X > 18$.
2. Sapendo anche che $\mathrm{Var}[X] = 9$, dare un limite superiore alla probabilità che $X > 18$. È migliore di quello del punto 1.?
3. Supponendo che le vendite nelle varie settimane siano indipendenti e che si possa applicare l'approssimazione normale, calcolare la probabilità che in un semestre (convenzione: 25 settimane) la vendita media settimanale sia maggiore di 18.

Valori utili della funzione di ripartizione di una normale standard:

$$\Phi(0.22) = 0.41294, \quad \Phi(3.30) = 0.99952, \quad \Phi(3.33) = 0.99957, \quad \Phi(3.36) = 0.99961$$

Soluzioni

Esercizio 1. Definiamo gli eventi

$$P_i := \{ \text{ il premio è dietro la porta } i\}, \quad i = \text{A, B, C}.$$

È sensato pensare che i tre eventi, aventi intersezione nulla e unione uguale all'evento certo, all'inizio abbiano uguale probabilità $\mathbb{P}(P_i) = 1/3$.

1. Abbiamo quindi che $\mathbb{P}(P_A) = 1/3$.

2. Poichè il premio è uno solo, sicuramente una delle due porte B o C non conterrà il premio, e sapere quale delle due non lo contiene non ci fornisce informazioni in più rispetto alla porta A, quindi la probabilità non cambia, abbiamo ancora $\mathbb{P}(P_A) = 1/3$.

   Per rendersene conto più formalmente, procediamo come segue. Definiamo l'evento

   $$M := \{ \text{ il premio è dietro la porta aperta da Monty Hall } \}$$

   Notiamo che, per come è fatto il gioco, abbiamo $\mathbb{P}(M^c) = 1$ (difatti Monty Hall sa dov'è il premio e apre sempre una porta senza). Dopo che Monty Hall ha aperto la porta, possiamo calcolare

   $$\mathbb{P}(P_A|M^c) = \frac{\mathbb{P}(P_A \cap M^c)}{\mathbb{P}(M^c)} = \mathbb{P}(P_A \cap M^c) = \mathbb{P}(P_A) = \frac{1}{3}$$

3. Abbiamo quindi $\mathbb{P}(P_B \cup P_C) = 1 - 1/3 = 2/3$. Notiamo però che l'evento $P_B \cup P_C$ significa ormai che il premio può stare solo sotto la porta rimasta.

4. La porta A ha sempre probabilità 1/3 di contenere il premio, mentre l'altra ha ormai probabilità 2/3: conviene quindi cambiare porta.

5. Supponiamo che il primo concorrente scelga ancora la porta A, e che il secondo concorrente scelga la porta B: per simmetria, questo non cambia le probabilità. Intuitivamente, abbiamo che $\mathbb{P}(P_B) = 1/3$ e $\mathbb{P}(P_C) = 1/3$, ma può venire il dubbio che la scelta iniziale del primo concorrente possa aver influenzato queste probabilità. Possiamo allora calcolare:

   $$\mathbb{P}(P_B) = \mathbb{P}(P_B|P_A)\mathbb{P}(P_A) + \mathbb{P}(P_B|P_A^c)\mathbb{P}(P_A^c) = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

   e analogamente

   $$\mathbb{P}(P_C) = \mathbb{P}(P_C|P_A)\mathbb{P}(P_A) + \mathbb{P}(P_C|P^B)\mathbb{P}(P^B) + \mathbb{P}(P_C|P^C)\mathbb{P}(P^C) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

6. In questo caso la porta scelta dal primo concorrente e la porta rimasta continuano ad avere la stessa probabilità di contenere il premio. Questa probabilità è uguale a 1/3 prima di sapere se il secondo concorrente ha vinto, 1/2 se si sa che il secondo concorrente non ha vinto, e chiaramente 0 se il secondo concorrente ha vinto.

Esercizio 2.

1. Definiamo le variabili aleatorie, per $i = 1, \ldots, n$, $n = 1000000 = 10^6$,

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-esimo individuo è morto per asma,} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Allora $X_i \sim Be(p)$ con $p := 1/100.000 = 10^{-5}$, e possiamo supporre che le $(X_i)_)i$ siano indipendenti. Definiamo poi $S_n := \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n,p)$, che rappresenta il numero di morti per asma.

   La probabilità cercata è quindi $\mathbb{P}\{S_n \geq 20\}$.

2. Siccome $n > 100$ e $p < 0.01$, si può utilizzare l'approssimazione di Poisson: $S_n \approx Po(\lambda)$, con $\lambda := np = 10$.

3. Siccome $np(1-p) = 10^6 \cdot 10^{-5}(1-10^{-5}) = 9.9999 > 5$, possiamo usare l'approssimazione normale: $S_n \approx N(np, np(1-p)) = N(10, 9.9999)$.

4. Per fare il calcolo con l'approssimazione di Poisson bisognerebbe effettuare 20 operazioni con la regola ricorsiva, che è piuttosto scomodo. Conviene allora ricorrere all'approssimazione normale, molto più veloce, e calcolare (usando la correzione di continuità)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_n \geq 20\} &= \mathbb{P}\{S_n \geq 19.5\} = \mathbb{P}\left\{\frac{S_n - 10}{\sqrt{9.9999}} \geq \frac{19.5 - 10}{\sqrt{9.9999}}\right\} = \mathbb{P}\{S_n^* \geq 3.00\} \simeq \\ &\simeq 1 - F_Z(3.00) = 1 - 0.99865 = 0.00135 \end{aligned}$$

Esercizio 3.

2. Per $x \in [0,1]$ si ha:

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y)\, dy = \frac{12}{5}x\left[2y - xy - \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{12}{5}x\left(\frac{3}{2} - x\right) = \frac{18}{5}x - \frac{12}{5}x^2$$

3. Per $y \in [0,1]$ si ha:

$$f_Y(y) = \int_0^1 f(x,y)\, dx = \left[\frac{12}{5}x^2 - \frac{4}{5}x^3 - \frac{6}{5}x^2 y\right]_0^1 = \frac{8}{5} - \frac{6}{5}y$$

1. Innanzitutto notiamo che $f_{X,Y} \geq 0$ su $[0,1] \times [0,1]$ ed è misurabile. Integrando ancora (tramite il teorema di Tonelli) si ottiene

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{12}{5}x\left(\frac{3}{2} - x\right)\, dx = \left[\frac{9}{5}x^2 - \frac{4}{5}x^3\right]_0^1 = \frac{9}{5} - \frac{4}{5} = 1$$

   e quindi $f_{X,Y}$ è una densità.

4. Siccome $f_X(x) f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$, le due variabili aleatorie non sono indipendenti.

Esercizio 4.

1. Per la disuguaglianza di Markov, dato che X assume valori in $\mathbb{N}$, abbiamo

$$\mathbb{P}\{X > 18\} = \mathbb{P}\{X \geq 19\} \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{19} = \frac{16}{19} = 0.842$$

2. Usando stavolta la disuguaglianza di Chebichev, abbiamo

$$\mathbb{P}\{X > 18\} = \mathbb{P}\{X \geq 19\} = \mathbb{P}\{X - 16 \geq 19 - 16\} \leq \mathbb{P}\{|X - 16| \geq 3\} \leq \frac{\text{Var}\,[X]}{3^2} = \frac{9}{9} = 1$$

   La stima con la disuguaglianza di Chebichev è addirittura peggiore di quella del punto 1.

3. Supponendo che in questo caso $n = 25$ sia abbastanza grande da poter usare l'approssimazione normale, rappresentiamo le vendite delle n settimane con variabili aleatorie $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ i.i.d. con la stessa legge di X. Allora la vendita media settimanale è data da $\bar{X}_n := \frac{S_n}{n}$, con $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, che chiaramente sarà una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{N}$: applichiamo quindi la correzione di continuità e calcoliamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\bar{X}_n > 18\} &= \mathbb{P}\{S_n > 18 \cdot 25\} = \mathbb{P}\{S_n \geq 450.5\} = \\
&= \mathbb{P}\left\{\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\text{Var}\,[S_n]}} \geq \frac{450.5 - 25 \cdot 16}{\sqrt{25 \cdot 9}}\right\} = \mathbb{P}\left\{S_n^* \geq \frac{50.5}{15}\right\} = \\
&= 1 - \mathbb{P}\{S_n^* < 3.36\} \simeq 1 - \Phi(3.36) = 1 - 0.99961 = 0.00039
\end{aligned}$$

Esame di Calcolo delle Probabilità del 15 settembre 2009
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Hanno superato la prova:

Barbon Andrea	25
Battistin Massimo	18
Bernardinelli Luca	27.5
Berti Laura	19.5
Bertola Giulio	20.5
Bordin Alice	23
Durighetto Sara	21
Festa Mattia	18
Furlan Filippo	22
Grando Laura	21.5
Guglielmo Silvia	17
Mascitti Giada Regina	17
Miscioscia Francesca	19
Sancassani Anna	22
Sartori Marta	20
Scenini Andrea	21.5
Simonetti Helena	20.5
Trevisiol Davide	19.5
Xotta Valeria	17
Zanchetta Federica	23
Zattara Claudia	21.5

Visione compiti, registrazione voti e orali: venerdì 16 settembre ore 10.00 aula 1BC/45.