Esame di Probabilità e Statistica del 17 giugno 2010
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Una moneta equilibrata viene lanciata ripetutamente per n volte.

1. Descrivere uno spazio probabilizzato che modellizzi il fenomeno.

Calcolare la probabilità che all'n-esimo lancio:

2. appaia per la prima volta testa;
3. il numero di teste e croci sia uguale;
4. esattamente due teste siano apparse in totale;
5. almeno due teste siano apparse in totale.

Esercizio 2. Siano X, Y indipendenti e di legge $Be(1/2)$.

1. Che legge ha $X + Y$?
2. Che legge ha $|X - Y|$?
3. Calcolare $\mathrm{Cov}\,(X + Y, |X - Y|)$.
4. Le due variabili aleatorie $X + Y$ e $|X - Y|$ sono indipendenti?

Esercizio 3. Sia X una variabile aleatoria positiva con densità f continua e funzione di ripartizione F, e definiamo la **funzione di azzardo** come $H(x) := -\log(1 - F(x))$ e il **tasso di azzardo** come

$$r(x) := \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \mathbb{P}\{X \leq x + h \mid X > x\}$$

1. Dimostrare che $r(x) = H'(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$.

Calcolare $r(x)$ nei seguenti casi:

2. $X \sim Exp(\lambda)$;
3. X ha funzione di ripartizione $F(x) := 1 - \exp(-ax^{b-1})$, $x \geq 0$, con $a, b > 0$;
4. X ha densità $f := \alpha g + (1 - \alpha)h$, dove $\alpha \in (0, 1)$ e g ed h sono densità di variabili aleatorie esponenziali di parametri $\lambda < \mu$ rispettivamente. Che succede in questo caso ad $r(x)$ per $x \to +\infty$?

Esercizio 4. L'ente che gestisce un tratto di autostrada conserva sale a sufficienza per eliminare un tratto di 80 pollici di neve. Supponiamo che la quantità di neve che cade al giorno sia una variabile aleatoria di media 1.5 pollici e deviazione standard di 0.3 pollici.

1. Trova la probabilità approssimata che il sale a disposizione basti per 50 giorni.
2. Quali sono le ipotesi fatte per rispondere al punto 1.? Possono ritenersi giustificate?
3. Supponiamo che nei primi 10 giorni del periodo siano caduti in totale 20 pollici di neve. Supponendo che la deviazione standard sia in ogni caso pari a 0.3, calcolare l'intervallo di confidenza asintotico al 99% per la media.
4. Possiamo ancora supporre che la media sia 1.5? I calcoli del punto 1. sono quindi ancora giustificati? (non eseguire nuovi calcoli)

Valori utili della funzione di ripartizione di una normale standard:

$$\Phi(2.33) = 0.99, \quad \Phi(2.35) = 0.99061, \quad \Phi(2.58) = 0.995, \quad \Phi(2.59) = 0.99520$$

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Dato che avvengono solo n estrazioni, può essere sufficiente lo spazio campionario $\Omega := \{0,1\}^n$, dotato della σ-algebra $\mathcal{A} := \mathbb{P}(\Omega)$ e, poichè le monete sono equilibrate, della probabilità $\mathbb{P}$ uniforme. Per comodità di notazione definiamo le variabili aleatorie $X_i(\omega) := \omega_i$ per $i = 1, \ldots, n$: allora le $(X_i)_i$ sono i.i.d. $\sim Be(\frac{1}{2})$; inoltre $\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, \frac{1}{2})$ denota il numero di teste.

2. Bisogna calcolare
$$\mathbb{P}\{X_1 = \ldots = X_{n-1} = 0, X_n = 1\} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

3. Bisogna calcolare
$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i = n - \sum_{i=1}^n X_i\right\} = \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i = \frac{n}{2}\right\}$$
Questa probabilità è uguale a 0 se n è dispari, mentre invece se n è pari è uguale a
$$\binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n/2} = \binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n!}{2^n[(\frac{n}{2})!]^2}$$

4. Bisogna calcolare
$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i = 2\right\} = \binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2^{n+1}}$$

5. Bisogna calcolare
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i \geq 2\right\} &= 1 - \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i = 0\right\} - \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i = 1\right\} = \\ &= 1 - \binom{n}{0}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^n - \binom{n}{1}\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 - \frac{n+1}{2^n}\end{aligned}$$

Esercizio 2.

1. Per risultati trattati nel corso, $X+Y \sim B(2, \frac{1}{2})$.

2. Dato che X e Y assumono valori in $\{0,1\}$, la variabile aleatoria $|X-Y|$ può assumere solo valori in $\{0,1\}$: di questo ci si può convincere anche calcolandone la densità discreta:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|X-Y|=0\} &= \mathbb{P}\{X=Y\} = \mathbb{P}\{X=Y=0\} + \mathbb{P}\{X=Y=1\} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\\ \mathbb{P}\{|X-Y|=1\} &= \mathbb{P}\{X=Y+1\} + \mathbb{P}\{X=Y-1\} =\\ &= \mathbb{P}\{X=1, Y=0\} + \mathbb{P}\{X=0, Y=1\} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

   e quindi $|X-Y| \sim Be(\frac{1}{2})$.

3. Innanzitutto calcoliamo, usando la densità congiunta di (X,Y),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X+Y)|X-Y|] &= \frac{1}{4}(0+0)|0-0| + \frac{1}{4}(1+0)|1-0| +\\ &+\frac{1}{4}(0+1)|0-1| + \frac{1}{4}(1+1)|1-1| = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

   e quindi

$$\text{Cov}\,(X+Y, |X-Y|) = \mathbb{E}[(X+Y)|X-Y|] - \mathbb{E}[X+Y]\mathbb{E}[|X-Y|] = \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0$$

4. Le due variabili aleatorie, anche se scorrelate, non sono indipendenti: difatti

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X+Y=0, |X-Y|=1\} &= \mathbb{P}\{X=0, Y=0, |X-Y|=1\} = \mathbb{P}(\emptyset) \neq\\ &\neq \mathbb{P}\{X+Y=0\}\cdot\mathbb{P}\{|X-Y|=1\} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Esercizio 3. Dato che X è positiva, sarà sufficiente fare i calcoli relativi ad $f(x)$, $F(x)$, $r(x)$ e $H(x)$ solo per $x \geq 0$.

1. Per ogni $x \geq 0$ calcoliamo

$$\begin{aligned}r(x) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\frac{\mathbb{P}\{X \leq x+h, X > x\}}{\mathbb{P}\{X > x\}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\frac{\mathbb{P}\{x < X \leq x+h\}}{1-F(x)} =\\ &= \frac{1}{1-F(x)} \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{F'(x)}{1-F(x)} = \frac{f(x)}{1-F(x)}\end{aligned}$$

   e

$$H'(x) = -\frac{-F'(x)}{1-F(x)} = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

2. Per $x \geq 0$ abbiamo $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, quindi

$$r(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda$$

3. Per $x \geq 0$ abbiamo $f(x) = F'(x) = a(b-1)x^{b-2}\exp(-ax^{b-1})$, e quindi
$$r(x) = \frac{a(b-1)x^{b-2}\exp(-ax^{b-1})}{\exp(-ax^{b-1})} = a(b-1)x^{b-2}$$

4. Per $x \geq 0$ abbiamo
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \alpha \int_{-\infty}^{x} g(t)\ dt + (1-\alpha)\int_{-\infty}^{x} h(t)\ dt = 1 - \alpha e^{-\lambda x} - (1-\alpha)e^{-\mu x}$$
e quindi
$$r(x) = \frac{\alpha g(x) + (1-\alpha)h(x)}{\alpha e^{-\lambda x} + (1-\alpha)e^{-\mu x}} = \frac{\alpha\lambda e^{-\lambda x} + (1-\alpha)\mu e^{-\mu x}}{\alpha e^{-\lambda x} + (1-\alpha)e^{-\mu x}} = \frac{\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu e^{-(\mu-\lambda)x}}{\alpha + (1-\alpha)e^{-(\mu-\lambda)x}}$$
e quindi, poichè $\mu - \lambda > 0$, per $x \to +\infty$ si ha
$$\lim_{x\to+\infty} r(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu e^{-(\mu-\lambda)x}}{\alpha + (1-\alpha)e^{-(\mu-\lambda)x}} = \frac{\alpha\lambda}{\alpha} = \lambda$$

Esercizio 4. Se chiamiamo X_i la variabile aleatoria che designa la quantità di neve per l'i-esima giornata, $i = 1, \ldots, 50$, allora abbiamo che $\mathbb{E}[X_i] = 1.5$, Var $[X_i] = 0.3^2$.

1. Bisogna calcolare
$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{50} X_i \leq 80\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 1.5\cdot 50}{0.3\sqrt{50}} \leq \frac{80-75}{2.1213}\right\}$$
Supponendo di poter applicare l'approssimazione normale (vedi punto 2.), abbiamo
$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{50} X_i \leq 80\right\} \simeq \Phi(2.35) = 0.99061$$

2. Le variabili aleatorie $(X_i)_i$ sono i.i.d. e con varianza finita: poichè il loro numero è pari a 50, può essere sufficiente a giustificare l'approssimazione normale.

3. Innanzitutto immergiamo il nostro fenomeno in un modello statistico $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$, con $\theta = m_X$, dove $m_X := \mathbb{E}_\theta[X_i]$ (per ipotesi, Var $_\theta[X_i] = 0.3^2$ per ogni $\theta \in \Theta$). Uno stimatore per $\theta = m_X$ è dato da $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; per $n = 10$ abbiamo allora
$$\bar{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i = \frac{20}{10} = 2$$
Lo stimatore $\bar{X}$ è corretto, consistente ed asintoticamente normale. Supponendo che $n = 10$ sia sufficiente per l'approssimazione normale in questo caso, l'intervallo di confidenza asintotico ha estremi $\bar{X} \pm \frac{\sigma(\theta)}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} = 2 \pm \frac{0.3}{\sqrt{10}} \cdot q_{0.995} = 2 \pm 0.244$, e quindi è $(1.756; 2.244)$.

4. Per verificare con un test l'ipotesi che $m_X = 1.5$, effettuiamo un test di ipotesi $\Theta_0 := \{m_X = 1.5\}$ e $\Theta_1 := \{m_X \neq 1.5\}$. Siccome $1.5 \notin (1.756; 2.244)$, l'ipotesi $\Theta_0 := \{m_X = 1.5\}$ viene rifiutata, in favore dell'alternativa $\Theta_1 := \{m_X \neq 1.5\}$. Siccome i calcoli del punto 1. erano basati sull'ipotesi $m_X = 1.5$, alla luce di questi nuovi dati non sono ovviamente giustificati.

Esame di Probabilità e Statistica del 17 giugno 2010
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Hanno superato la prova:

Agostini Andrea	$23 + 3^-$	Aldeghieri Michele	22.5
Alzetta Giovanni	$17.5 + 2^+$	Balsemin Lorenzo	17.5
Barco Davide	$24.5 + 3^+$	Bolzon Riccardo	21.5
Bonato Alberto	$20.5 + 3^-$	Bressan Luca	23
Camella Matteo	$22.5 + 3^-$	Casarotti Fabio	18.5
Casotto Mattia	$19 + 2^-$	Cecchetto Marco	23
Centis Francesco	$16 + 3^-$	Cipani Luca	30.5
Condoluci Andrea	29	Corbanese Andrea	$26 + 3^+$
De Franceschi Giovanni	$23 + 2^+$	Dondi Francesco	$30 + 3^-$
Faccio Mara	18.5	Ferraresso Francesco	26
Fiorin Lucio	$23.5 + 3^+$	Fornea Michele	$30 + 3^+$
Gallana Marco	24.5	Galliazzo Marta	$22.5 + 3^+$
Gastaldon Nicola	17.5	Giacon Federico	25.5
Loreggia Marco	25	Maddalon Lorenzo	17.5
Mascitti Giada Regina	23.5	Minuz Erica	$30 + 2^-$
Montagner Deniz	$25 + 3^-$	Orecchia Giulio	$30 + 3^-$
Padovani Matteo	17	Palmurella Francesco	23.5
Pan Stefania	24	Pasqualetto Enrico	$30.5 + 3^+$
Pasquali Andrea	$29 + 3^+$	Ragazzo Filippo	$18.5 + 3^+$
Rasi Giulio	$21 + 2^-$	Sacchetto Valentina	21
Salvador Marcella	24.5	Salvato Gabriele	23.5
Scafuri Elisabetta	19	Serio Andrea	$24.5 + 3^+$
Sgambaro Nicola	24.5	Squarcinni Anna	17
Stavitskiy Andrey	$25.5 + 2^-$	Tardivo Carlo	24
Tonello Lara	22	Vablè Elisabetta	21.5
Vallata Luca	$20 + 3^-$	Vescovo Giulia	18
Zambito Rosanna	18.5	Zanin Anna	17

Visione compiti, registrazione voti e orali: lunedì 21 giugno ore 10.00 aula 1C/150.