Esame di Probabilità e Statistica del 9 luglio 2010
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Valori utili della funzione di ripartizione di una normale standard:

$$\Phi(2.23) = 0.98713, \qquad \Phi(2.31) = 0.98956, \qquad \Phi(2.33) = 0.99, \qquad \Phi(2.40) = 0.99180$$

Esercizio 1. Hai chiesto ad un vicino di innaffiare una piantina delicata mentre sei in vacanza. Pensi che senza acqua la piantina muoia con probabilità 0.8, mentre se innaffiata questa probabilità si riduca a 0.15. La tua fiducia che il vicino si ricordi di innaffiarla è del 90%.

1. Qual è la probabilità che la piantina sia ancora viva al tuo ritorno?
2. Se fosse morta, quale sarebbe la probabilità che il vicino si sia dimenticato di innaffiarla?

Supponiamo ora di avere affidato al vicino due piantine uguali, con le stesse probabilità di cui sopra, e che il vicino le innaffi entrambe con probabilità 90% oppure non le innaffi con probabilità 10%: in entrambi i casi le probabilità di sopravvivenza delle due piante sono indipendenti tra di loro.

3. Qual è la probabilità che almeno una piantina sia ancora viva al tuo ritorno?
4. Se fossero entrambe morte, quale sarebbe la probabilità che il vicino si sia dimenticato di innaffiarle?

Esercizio 2. Supponiamo che il numero giornaliero di persone ricoverate per attacchi violenti di asma in un dato ospedale sia una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 1.5$.

1. Come sarà distribuito il numero di persone ricoverate per attacchi violenti di asma in due giorni?
2. Qual è la probabilità di osservare 3 o più casi in un periodo di 2 giorni?

In un particolare periodo di 2 giorni, i livelli di inquinamento dell'aria aumentano e la distribuzione di attacchi su 1 giorno diventa una legge di Poisson con parametro $\lambda_1 = 3$.

3. Rispondere al punto 2 in questa nuova situazione.
4. Se in ogni anno 10 giorni sono di alto inquinamento, qual è il numero atteso di ricoveri per asma in un dato anno? Qual è la varianza?
5. Si supponga che, in un altro ospedale in una zona non soggetta a giorni di alto inquinamento, in un anno siano stati osservati 83 giorni con 1 singolo ricovero, 122 giorni con 2 ricoveri, 62 giorni con 3 ricoveri e 21 giorni con 4 ricoveri. Supponendo che anche in questo ospedale il numero giornaliero di ricoveri segua una legge di Poisson, stimarne il parametro (suggerimento: ricordarsi che il parametro è uguale alla media).

Esercizio 3. Il numero di settimane di funzionamento di un certo tipo di batterie è una variabile aleatoria con media 5 e deviazione standard 1.5. Quando una batteria si esaurisce viene immediatamente sostituita con una nuova.

1. La legge del tempo di funzionamento delle batterie può essere esponenziale?
2. Calcolare media e varianza del tempo totale di funzionamento di 13 batterie consecutive.
3. Senza supporre di poter usare l'approssimazione normale, stimare la probabilità che queste 13 batterie durino complessivamente più di un anno.
4. Fare lo stesso calcolo del punto 3. supponendo di poter usare l'approssimazione normale.

Esercizio 4. Supponiamo di avere un campione $X_1, \ldots, X_n$ di variabili aleatorie di Bernoulli di parametro p sconosciuto. A volte, quando si calcola l'intervallo di confidenza asintotico per p, si possono trovare estremi negativi o maggiori di 1: scopo dell'esercizio è trovare condizioni sufficienti per evitarlo.

1. Scrivere lo stimatore "classico" $\hat{p}$ per p. Quali sono le condizioni più deboli sotto cui questo stimatore è asintoticamente normale?
2. Scrivere l'intervallo di confidenza asintotico di livello $1 - \alpha$ ottenuto approssimando $\sigma(p)$ con un opportuno stimatore.
3. Supponendo che le condizioni del punto 1. siano soddisfatte per $\hat{p}$, dimostrare che l'estremo inferiore dell'intervallo è positivo se $q_{1-\alpha/2} < \sqrt{5}$, e dire per quali α succede questo.
4. Analogamente al punto 3., dimostrare che l'estremo superiore dell'intervallo è minore di 1 se $q_{1-\alpha/2} < \sqrt{5}$, e dire per quali α succede questo.

Soluzioni

Esercizio 1. Innanzitutto definiamo gli eventi

$$\begin{aligned} A_i &:= \{i\text{-esima piantina muore }\}, \quad i=1,2, \\ B &:= \{\text{ il vicino si ricordi di innaffiarla }\} \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere i dati come

$$\mathbb{P}(A_i|B^c) = 0.8, \quad \mathbb{P}(A_i|B) = 0.15, \quad \mathbb{P}(B) = 0.9$$

1. Le ipotesi della formula della probabilità totale sono soddisfatte per (B, B^c), quindi

$$\mathbb{P}(A_i^c) = \mathbb{P}(A_i^c|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_i^c|B^c)\mathbb{P}(B^c) = 0.85 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.785$$

2. Le ipotesi della formula di Bayes sono soddisfatte per B^c ed A_i, quindi

$$\mathbb{P}(B^c|A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i|B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(A_i)} = \frac{0.8 \cdot 0.1}{1 - 0.785} = 0.372$$

3. Il testo ci dice che A_1 ed A_2 sono indipendenti sia sotto $\mathbb{P}(\cdot|B)$ che sotto $\mathbb{P}(\cdot|B^c)$. Per la formula della probabilità totale abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2|B^c)\mathbb{P}(B^c) = \\ &= \mathbb{P}(A_1|B)\mathbb{P}(A_2|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_1|B^c)\mathbb{P}(A_2|B^c)\mathbb{P}(B^c) = \\ &= 0.15^2 \cdot 0.9 + 0.8^2 \cdot 0.1 = 0.08425 \end{aligned}$$

e quindi $\mathbb{P}((A_1 \cap A_2)^c) = 1 - 0.08425 = 0.91575$.

4. Utilizzando la formula di Bayes e l'informazione sull'indipendenza abbiamo

$$\mathbb{P}(B^c|A_1 \cap A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2|B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} = \frac{\mathbb{P}(A_1|B^c)\mathbb{P}(A_2|B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} = \frac{0.8^2 \cdot 0.1}{0.08425} = 0.7596$$

Esercizio 2.

1. Definiamo X_i, $i = 1, 2$, il numero di persone ricoverate per asma nei giorni 1 e 2. Allora X_1 e X_2 sono indipendenti e con legge di Poisson di parametro 1.5. Allora $X_1 + X_2 \sim Po(3)$.

2. Abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X = 0\} &= e^{-3} = 0.04978 \\ \mathbb{P}\{X = 1\} &= \mathbb{P}\{X = 0\}\frac{3}{1} = 0.04978 \cdot \frac{3}{1} = 0.14936 \\ \mathbb{P}\{X = 2\} &= \mathbb{P}\{X = 1\}\frac{3}{2} = 0.14936 \cdot \frac{3}{2} = 0.22404 \end{aligned}$$

quindi

$$\mathbb{P}\{X \geq 3\} = 1 - \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}\{X = k\} = 1 - 0.04978 - 0.14936 - 0.22404 = 0.57682$$

3. Definiamo Y_i, $i = 1, 2$, il numero di persone ricoverate per asma nei due giorni con alto inquinamento. Allora Y_1 e Y_2 sono indipendenti e con legge di Poisson di parametro 3, e $Y_1 + Y_2 \sim Po(6)$. Abbiamo poi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X = 0\} &= e^{-6} = 0.00247 \\
\mathbb{P}\{X = 1\} &= \mathbb{P}\{X = 0\}\frac{6}{1} = 0.00247 \cdot \frac{6}{1} = 0.01487 \\
\mathbb{P}\{X = 2\} &= \mathbb{P}\{X = 1\}\frac{6}{2} = 0.01487 \cdot \frac{6}{2} = 0.04461
\end{aligned}$$

quindi

$$\mathbb{P}\{X \geq 5\} = 1 - \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}\{X = k\} = 1 - 0.00247 - 0.01487 - 0.04461 = 0.93805$$

4. In un dato anno abbiamo 355 giorni ad inquinamento “normale”, a cui corrispondono le variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_{355}$ i.i.d. di legge $Po(1.5)$, e 10 giorni ad alto inquinamento, a cui corrispondono le $Y_1, \ldots, Y_{10}$ i.i.d. di legge $Po(3)$. Abbiamo quindi che il numero di ricoveri in un dato anno è $Z := \sum_{i=1}^{355} X_i + \sum_{i=1}^{10} Y_i$, e quindi

$$E[Z] = \sum_{i=1}^{355} E[X_i] + \sum_{i=1}^{10} E[Y_i] = 355 \cdot 1.5 + 10 \cdot 3 = 562.5$$

Siccome poi Z è somma di variabili aleatorie di Poisson indipendenti, è a sua volta una variabile aleatoria di Poisson di parametro $E[Z] = 562.5$, che corrisponde anche alla sua varianza.

5. Definiamo le variabili aleatorie $(Z_i)_i$ i.i.d. di legge $Po(\lambda_1)$ corrispondenti ai ricoveri annuali dell'altro ospedale, con $i = 1, \ldots, 365$. Sappiamo allora che, poichè λ_1 coincide con la media delle Z_i, un suo stimatore è

$$\hat{\lambda}_1 = \bar{Z} = \frac{1}{365} \sum_{i=1}^{365} Z_i$$

Dai dati che abbiamo, possiamo calcolare

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{1 \cdot 83 + 2 \cdot 122 + 3 \cdot 62 + 4 \cdot 21}{365} = \frac{597}{365} = 1.64$$

Esercizio 3. Possiamo modellizzare il tempo di vita in settimane dell'i-esima pila con una variabile aleatoria reale positiva X_i, $i \in \mathbb{N}^*$. Allora sappiamo che $\mathbb{E}[X_i] = 5$, Var $[X_i] = 1.5^2 = 2.25$ e possiamo supporre le $(X_i)_i$ indipendenti tra di loro.

1. Se fosse $X_i \sim Exp(\lambda)$, si avrebbe $\mathbb{E}[X_i] = 5 = 1/\lambda$ e quindi $\lambda = 0.2$, ma anche Var $[X_i] = 1/\lambda^2 = 5^2 = 25$, mentre invece sappiamo che Var $[X_i] = 2.25 \neq 25$, e quindi le X_i non possono essere esponenziali.

2. Definiamo $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$; allora

$$\mathbb{E}[S_{13}] = \sum_{i=1}^{13} \mathbb{E}[X_i] = 13 \cdot 5 = 65, \qquad \text{Var}\,[S_{13}] = \sum_{i=1}^{13} \text{Var}\,[X_i] = 13 \cdot 2.25 = 29.25$$

dove abbiamo usato che le $(X_i)_i$ sono indipendenti.

3. Bisogna calcolare $\mathbb{P}\{S_{13} > 52\}$. Utilizzando la disuguaglianza di Markov otteniamo che questa probabilità è minore o uguale di una quantità maggiore di 1, che è una limitazione banale. Utilizzando invece la disuguaglianza di Chebichev unilatera si ha

$$\mathbb{P}\{S_{13} \le 52\} = \mathbb{P}\{S_{13} > 65 - 13\} \le \frac{\text{Var}\,[S_{13}]}{\text{Var}\,[S_{13}] + 13^2} = \frac{29.25}{29.25 + 169} = 0.14754$$

e quindi $\mathbb{P}\{S_{13} > 52\} \ge 1 - 0.14754 = 0.85246$.

4. Supponendo di poter usare l'approssimazione normale abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{S_{13} > 52\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{S_{13} - 65}{\sqrt{29.25}} > \frac{52 - 65}{5.41}\right\} = \mathbb{P}\{S_{13}^* > -2.40\} = \\ &= 1 - \mathbb{P}\{S_{13}^* \le -2.40\} \simeq 1 - \Phi(-2.40) = \Phi(2.40) = 0.99180\end{aligned}$$

Esercizio 4.

1. Lo stimatore "classico" è

$$\hat{p} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

che è asintoticamente normale se $np > 5$ ed $n(1-p) > 5$.

2. L'intervallo di confidenza asintotico ha estremi

$$\hat{p} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} q_{1-\alpha/2}$$

3. Abbiamo che $\hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} q_{1-\alpha/2} > 0$ se e solo se $\hat{p}^2 > \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} q^2_{1-\alpha/2}$, cioè se e solo se $\frac{n\hat{p}}{1-\hat{p}} > q^2_{1-\alpha/2}$. Tuttavia, se $n\hat{p} > 5$, a maggior ragione $\frac{n\hat{p}}{1-\hat{p}} > 5$, e quindi se $q^2_{1-\alpha/2} < 5$ abbiamo la tesi; questo si verifica se $q_{1-\alpha/2} < \sqrt{5}$, cioè se $1 - \alpha/2 < \Phi(\sqrt{5}) = 0.98713$, infine se $\alpha > 0.02574$.

4. Abbiamo che $\hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} q_{1-\alpha/2} < 1$ se e solo se $(1-\hat{p})^2 > \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} q^2_{1-\alpha/2}$, cioè se e solo se $\frac{n(1-\hat{p})}{\hat{p}} > q^2_{1-\alpha/2}$. Tuttavia, se $n(1-\hat{p}) > 5$, a maggior ragione $\frac{n(1-\hat{p})}{\hat{p}} > 5$, e quindi anche qui se $q^2_{1-\alpha/2} < 5$ abbiamo la tesi; come prima, questo si verifica se $q_{1-\alpha/2} < \sqrt{5}$, cioè se $1 - \alpha/2 < \Phi(\sqrt{5}) = 0.98713$, infine se $\alpha > 0.02574$.

Esame di Probabilità e Statistica del 9 luglio 2010
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Hanno superato la prova:

Alzetta Giovanni	$20 + 2^+$
Antonello Michele	$21 + 3^-$
Balsemin Lorenzo	17.5
Benedetti Nicolò	$17 + 3^+$
Bettiol Enrico	20
Camelia Matteo	$25.5 + 3^-$
Casotto Mattia	$23 + 2^-$
Chech Andrea	19.5
Ciulli Giorgia	18
Coletto Davide	18
De Franceschi Giovanni	$21.5 + 2^+$
Gatti Pietro	$25.5 + 3^-$
Giacon Federico	23.5
Giles Susanne	17
Maddalon Lorenzo	23.5
Nigrelli Valentina	23
Pinto Andrea	$15 + 3^-$
Sacchetto Valentina	21
Saha Jyoti Prakash	20
Scalabrin Ilaria	21
Sorci Ruggero	$15 + 3^-$
Tonello Lara	22
Tortarolo Carlo Emilio	$16 + 2^-$
Tovo Anna	$18 + 3^-$
Trajkovic Marija	18.5
Turris Francesca	20
Vescovo Giulia	20.5
Zaccaria Francesco	$22 + 3^+$
Zamprogno Marco	$18 + 2^+$
Zanin Anna	18
Zarpellon Giulia	22
Zotto Annalisa	$16.5 + 3^-$

Visione compiti, registrazione voti e orali: martedì 13 luglio ore 11.00 aula LuF1.