Esame di Probabilità e Statistica del 23 agosto 2010
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Jane ha tre figli, ciascuno di loro con uguale probabilità di essere maschio o femmina indipendentemente dagli altri. Definiamo gli eventi:

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{tutti i figli sono dello stesso sesso}\}, \\ B &:= \{\text{c'è almeno un maschio}\}, \\ C &:= \{\text{ci sono almeno un maschio e una femmina}\}. \end{aligned}$$

1. Definire un opportuno spazio probabilizzato per modellizzare il fenomeno.
2. Calcolare le probabilità dei 3 eventi definiti sopra.
3. Mostrare che A è indipendente da B, B è indipendente da C ma A e C sono dipendenti.
4. Dire cosa cambia nelle domande precedenti nel caso in cui Jane abbia 4 figli.

Esercizio 2. Siano X e Y variabili aleatorie discrete, con densità discreta congiunta

$$p_{X,Y}(x,y) := \frac{C}{(x+y-1)(x+y)(x+y+1)}, \qquad x, y \geq 1$$

1. Calcolare le densità marginali di X e di Y (suggerimento: esprimere la densità discreta congiunta come $\frac{a}{x+y-1} + \frac{b}{x+y} + \frac{c}{x+y+1}$ per a, b, c opportuni).
2. Quanto vale la costante C?
3. Calcolare $\mathbb{E}[X]$ ed $\mathbb{E}[Y]$.
4. Quanto vale la covarianza tra X e Y?

Esercizio 3. Una variabile aleatoria reale X si dice **di Cauchy** se ha come densità la funzione

$$f(t) := \frac{1}{\pi(1+t^2)}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Nel seguito, sia X una variabile aleatoria di Cauchy.

1. Dimostrare che X non ammette speranza finita.
2. Dimostrare che $Y := 1/X$ è ancora di Cauchy.
3. Calcolare la funzione di ripartizione di $Z := \frac{a}{1+X^2}$.
4. Calcolare la densità di Z.

Esercizio 4. Siano $(X_n)_n$ i.i.d. $\sim Po(\lambda)$, con $\lambda > 0$, e poniamo $\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$.

1. Fissato $\eta > 0$, stimare con la disuguaglianza di Chebichev la probabilità

$$\mathbb{P}\{|\bar{X}_n - \lambda| > \eta\}$$

2. Stimare la stessa quantità usando l'approssimazione normale.
3. Supponendo che $\lambda = 1$ e $n = 10000$, confrontare le due stime per $\eta = 10^{-2}$, $\eta = 2 \cdot 10^{-2}$ e $\eta = 3 \cdot 10^{-2}$.

Valori utili della funzione di ripartizione di una normale standard:

$$\Phi(1) = 0.8413, \qquad \Phi(2) = 0.9772, \qquad \Phi(3) = 0.9987$$

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Una possibile scelta è $\Omega := \{M, F\}^3$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ uniforme, che fa in modo che i sessi dei 3 figli siano indipendenti tra loro.

2. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{MMM, FFF\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\{MMM, MMF, MFM, FMM\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \\
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

3. Abbiamo

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{MMM\}) = \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

e quindi A e B sono indipendenti; questo implica che anche B e $C = A^c$ sono indipendenti, mentre A e C non sono (ovviamente) indipendenti perchè $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \frac{3}{16} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$.

4. Se Jane ha 4 figli, allora un possibile spazio probabilizzato è dato da $\Omega := \{M, F\}^4$ e ancora $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}$ uniforme. Abbiamo poi che

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{MMMM, FFFF\}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, \\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\{MMMM, MMMF, MMFM, MFMM, FMMM\}) = \frac{5}{16}, \\
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}
\end{aligned}$$

Infine, A e C continuano a non essere indipendenti, e stavolta nemmeno A e B (e quindi B e C) possono essere indipendenti poichè $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{5}{128}$, che è diversa da ogni possibile probabilità su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, e in particolare da $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{MMMM\}) = \frac{1}{16}$.

Esercizio 2.

1. Seguendo il suggerimento, abbiamo

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{a(x+y)^2 + a(x+y) + b(x+y)^2 - b + c(x+y)^2 - c(x+y)}{(x+y-1)(x+y)(x+y+1)}$$

Uguagliando i coefficienti del polinomio in $(x + y)$ nel numeratore con la definizione nel testo, troviamo il sistema

$$\begin{cases} a + b + c &= 0, \\ a - c &= 0, \\ -b &= C. \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(a,b,c) = \frac{C}{2}(1,-2,1)$. Possiamo allora calcolare, per ogni $x \geq 1$,

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^{\infty} \frac{C}{2}\left(\frac{1}{x+y-1} - \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x+y+1}\right) = \frac{C}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$

e per ogni $y \geq 1$,

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{C}{2}\left(\frac{1}{x+y-1} - \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x+y+1}\right) = \frac{C}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)$$

2. Poichè bisogna avere $1 = \sum_{x=1}^{\infty} p_X(x)$, abbiamo

$$1 = \sum_{x=1}^{\infty} p_X(x) = \frac{C}{2}\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{C}{2}\cdot\frac{1}{1}$$

   e quindi $C = 2$.

3. Poichè sia X che Y sono non negative, la speranza esiste sicuramente per entrambe le variabili aleatorie ed è uguale, rispettivamente, a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{x+1}\right) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

   e allo stesso modo $\mathbb{E}[Y] = +\infty$.

4. Poichè sia $\mathbb{E}[X]$ che $\mathbb{E}[Y]$ sono infinite, la covarianza non è ben definita.

Esercizio 3.

1. Basta calcolare

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{\mathbb{R}} \frac{|t|}{\pi(1+t^2)}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{t}{\pi(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{\pi}[\log(1+t^2)]_0^{+\infty} = +\infty$$

2. Calcoliamo la funzione di ripartizione di Y: per ogni $y \in \mathbb{R}^*$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\{1/X \leq y\} = \mathbb{P}\{X \geq 1/y\} = \int_{1/y}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt$$

   che è C^1 su $\mathbb{R}^*$, quindi la densità di Y viene ad essere

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = -\frac{1}{\pi(1+(\frac{1}{y})^2)}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{\pi(y^2+1)}$$

   per ogni $y \in \mathbb{R}^*$. Siccome la variabile aleatoria Y non è ben definita solo nel punto 0, possiamo dire che ammette come densità la densità di Cauchy su tutto $\mathbb{R}$.

3. Supponiamo che $a > 0$. Innanzitutto $0 \leq Z \leq a$ q.c., e quindi per ogni $z \in (0, a)$ si ha

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}\left\{\frac{a}{1+X^2} \leq z\right\} = \mathbb{P}\left\{X^2 \geq \frac{a}{z} - 1\right\} = \mathbb{P}\left\{|X| \geq \sqrt{\frac{a}{z} - 1}\right\} = \\ &= 2\mathbb{P}\left\{X \leq -\sqrt{\frac{a}{z} - 1}\right\} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{a}{z}-1}} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{2}{\pi}[\text{arctg } t]_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{a}{z}-1}} = \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\text{arctg}\sqrt{\frac{a}{z} - 1} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che X è simmetrica, avendo come densità una funzione pari. Si ha poi $F_Z(z) = 0$ per $z \leq 0$ e $F_Z(z) = 1$ per $z \geq a$.

4. Siccome F_Z è C^1 su tutto $\mathbb{R}$, basta calcolare

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = -\frac{2}{\pi(1 + \frac{a}{z} - 1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{z} - 1}} \cdot \left(-\frac{a}{z^2}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{z(a-z)}}$$

per $z \in (0, a)$ e $f_Z(z) = 0$ altrimenti.

Esercizio 4.

1. Dal corso sappiamo che $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \lambda$ e Var $[\bar{X}_n] = \frac{\lambda}{n}$. Allora per ogni $\eta > 0$ abbiamo

$$\mathbb{P}\{|\bar{X}_n - \lambda| > \eta\} \leq \frac{\text{Var }[\bar{X}_n]}{\eta^2} = \frac{\lambda}{n\eta^2}$$

2. Se si può applicare l'approssimazione normale, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|\bar{X}_n - \lambda| > \eta\} &= 1 - \mathbb{P}\{-\eta \leq \bar{X}_n - \lambda \leq \eta\} = 1 - \mathbb{P}\left\{-\frac{\eta}{\sqrt{\lambda/n}} \leq \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \leq \frac{\eta}{\sqrt{\lambda/n}}\right\} = \\ &= 1 - \mathbb{P}\left\{-\eta\sqrt{\frac{n}{\lambda}} \leq S_n^* \leq \eta\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\right\} \simeq 1 - \Phi\left(\eta\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\right) + \Phi\left(-\eta\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\right) = \\ &= 2 - 2\Phi\left(\eta\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\right) \end{aligned}$$

3. Con i numeri del testo abbiamo che la probabilità richiesta è maggiorata dalle seguenti quantità:

η	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$
dis. di Chebichev	1	$1/4 = 0.25$	$1/9 = 0.1111$
appr. normale	$2 - 2\Phi(1) = 0.3174$	$2 - 2\Phi(2) = 0.0456$	$2 - 2\Phi(3) = 0.0026$

Esame di Probabilità e Statistica del 23 agosto 2010
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Hanno superato la prova:

Balsemin Lorenzo	21.5
Bartolini Cecilia	20.5
Cecchetto Martino	20
Coletto Davide	21.5
Favaretto Maddalena	17
Giacon Federico	30.5
Giubilato Daniela	22
Licari Francesca	17
Melchiori Anna	18.5
Pasqualetto Martina	17.5
Passarini Ada	23.5
Piccolo Francesco	21.5
Prevedello Anna	22.5
Prevedello Giulio	17
Raimondo Alessandro	19
Sgarabottolo Alessandro	19.5
Zanatta Luana	17.5

Visione compiti, registrazione voti e orali: mercoledì 25 agosto ore 11.00 aula 2AB/45.