

Esercizi di Probabilità e Statistica della 2^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e $B \in \mathcal{A}$ non trascurabile. Dimostrare che la funzione d'insieme $\mathcal{A} \ni A \rightarrow \mathbb{P}(A|B) \in [0, 1]$ è una probabilità.

Esercizio 2 (Formula delle probabilità totali per probabilità condizionate). Siano A, B, C tre eventi, per cui $\mathbb{P}(B \cap C) \neq 0$, $\mathbb{P}(B \cap C^c) \neq 0$. Si dimostri l'identità

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B \cap C^c)\mathbb{P}(C^c|B).$$

Esercizio 3 (paradosso di Simpson). Due ospedali, X e Y, sono specializzati nella cura di una certa malattia mortale. I pazienti possono entrare ancora in buone condizioni oppure già in cattive condizioni. Dei pazienti ricoverati in un anno nei due ospedali, questi erano i risultati di guarigione:

	guariti	totale
ospedale A, buone condizioni	87	90
ospedale B, buone condizioni	59	60
ospedale A, cattive condizioni	3	10
ospedale B, cattive condizioni	21	40

Eseguiamo ora l'esperimento aleatorio "consideriamo un paziente a caso".

1. Rappresentare, in un opportuno spazio probabilizzato, i dati della tabella utilizzando gli eventi così definiti: "il paziente era "

$$X = \{\text{dell'ospedale X}\}, \quad Y = \{\text{dell'ospedale Y}\},$$

$$B = \{\text{in buone condizioni}\}, \quad C = \{\text{in cattive condizioni}\}, \quad G = \{\text{guarito}\}$$

2. La probabilità che un paziente in buone condizioni fosse guarito era maggiore per l'ospedale X o per l'ospedale Y? E per un paziente in cattive condizioni? Da quale ospedale vi fareste curare?

Supponiamo ora che un esaminatore "facilone" trascuri le condizioni iniziali dei pazienti e voglia vedere, con un solo calcolo, quale dei due ospedali è il migliore.

3. La probabilità che un paziente fosse guarito era maggiore per l'ospedale X o per l'ospedale Y?
4. Perché l'esaminatore "facilone" arriva a conclusioni errate?

Esercizio 4. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato.

1. Siano A e B due eventi, con $A \subset B$. Quando è possibile che A e B siano indipendenti?
2. Mostrare che se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono eventi indipendenti, allora $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c)$.

3. Mostrare che se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono eventi indipendenti tali che $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \leq 1$, allora

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) \leq n^{-n}.$$

(Sugg: usare il fatto che se $a_1, \dots, a_n \geq 0$ allora $(a_1 + \dots + a_n)/n \geq (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{1/n}$)

Esercizio 5. Da un'urna contenente n palline di cui k rosse e $n - k$ verdi, con $1 \leq k \leq n - 1$, si estrae una pallina e quindi, senza reimmetterla nell'urna, si estrae una seconda pallina. Si considerino gli eventi informalmente descritti da

$A_1 =$ “la prima pallina estratta è rossa” , $A_2 =$ “la seconda pallina estratta è rossa”

Definire uno spazio probabilizzato che descriva il fenomeno, e mostrare che A_1 e A_2 non sono indipendenti.

Esercizio 6. La translucenza nucale e il bitest sono due esami usati, come l'amniocentesi e la villocentesi, per stabilire se un feto sia affetto dalla sindrome di Down (trisomia 21) o la sindrome di Edwards (trisomia 18). Amniocentesi e villocentesi danno una risposta certa ma provocano il rischio di un aborto spontaneo, mentre translucenza nucale e bitest sono esami non invasivi che non hanno alcuna conseguenza sul feto o sulla madre, ma sono soggetti ad errori. In particolare, la translucenza nucale individua il 77% dei feti Down e dà un risultato positivo anche nel 5% dei casi in cui il feto non è Down. Gli stessi dati per il bitest sono rispettivamente del 60% e del 5%. Possiamo ritenere che questi eventi siano indipendenti sia nel caso in cui il feto è Down sia nel caso in cui il feto non lo è.

Una clinica esegue assieme i due test nel cosiddetto “test combinato”, che è positivo se almeno uno dei due test lo è: la clinica dice così di identificare il 90% dei feti affetti da (queste) malattie cromosomiche, con un 5% di falsi positivi. Infine, la probabilità che un feto sia Down in una donna, in funzione dell'età, è riportata sotto.

età della madre	rischio alla 12 ^a settimana
20	1/1018
25	1/901
30	1/596
36	1/187
40	1/64
44	1/20

1. Calcolare la probabilità che il “test combinato” dia un risultato positivo nel caso di un feto Down. Confrontare questo risultato con la probabilità promessa dalla clinica.
2. Calcolare la probabilità che il “test combinato” dia un risultato positivo nel caso di un feto non Down. Confrontare questo risultato con la probabilità promessa dalla clinica.
3. Calcolare la probabilità che una donna di 36 anni, a cui il “test combinato” sia risultato positivo, abbia veramente un bambino Down.
4. Calcolare la probabilità che una donna di 36 anni, a cui entrambi i test siano risultati positivi, abbia veramente un bambino Down.

Soluzioni

Esercizio 1. Bisogna verificare che $\mathbb{P}(\cdot|B)$ soddisfa i due assiomi della probabilità:

1. $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$; difatti

$$\mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

2. Se $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ sono disgiunti, allora anche $((A_n \cap B))_n$ sono disgiunti, e si ha:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cup_n A_n|B) &= \frac{\mathbb{P}((\cup_n A_n) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\cup_n (A_n \cap B))}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\sum_n \mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \\ &= \sum_n \frac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_n \mathbb{P}(A_n|B)\end{aligned}$$

Esercizio 2. Usando la definizione di probabilità condizionata, calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B \cap C^c)\mathbb{P}(C^c|B) &= \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)} \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C^c)}{\mathbb{P}(B \cap C^c)} \frac{\mathbb{P}(C^c \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C^c)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B)\end{aligned}$$

Esercizio 3 (paradosso di Simpson).

1. Poichè ci sono $90 + 60 + 10 + 40 = 200$ pazienti, consideriamo uno spazio probabilizzato con 200 elementi e la legge uniforme. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G \mid X \cap B) &= \frac{87}{90}, & \mathbb{P}(X \cap B) &= \frac{90}{200}, \\ \mathbb{P}(G \mid Y \cap B) &= \frac{59}{60}, & \mathbb{P}(Y \cap B) &= \frac{60}{200}, \\ \mathbb{P}(G \mid X \cap C) &= \frac{3}{10}, & \mathbb{P}(X \cap C) &= \frac{10}{200}, \\ \mathbb{P}(G \mid Y \cap C) &= \frac{21}{40}, & \mathbb{P}(Y \cap C) &= \frac{40}{200}.\end{aligned}$$

2. Abbiamo $\mathbb{P}(G \mid X \cap B) = \frac{87}{90} < \mathbb{P}(G \mid Y \cap B) = \frac{59}{60}$, e $\mathbb{P}(G \mid X \cap C) = \frac{3}{10} < \mathbb{P}(G \mid Y \cap C) = \frac{21}{40}$. Sia in buone condizioni che in cattive condizioni, l'ospedale Y sembra migliore.

3. Bisogna ora calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G \mid X) &= \frac{\mathbb{P}(G \cap X)}{\mathbb{P}(X)} = \frac{\mathbb{P}(G \cap X \cap B) + \mathbb{P}(G \cap X \cap C)}{\mathbb{P}(X)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(G \mid X \cap B)\mathbb{P}(X \cap B) + \mathbb{P}(G \mid X \cap C)\mathbb{P}(X \cap C)}{\mathbb{P}(X \cap B) + \mathbb{P}(X \cap C)} = \frac{\frac{87}{90} \cdot \frac{90}{200} + \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{200}}{\frac{90}{200} + \frac{10}{200}} = \frac{9}{10}\end{aligned}$$

e allo stesso modo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G \mid Y) &= \frac{\mathbb{P}(G \cap Y)}{\mathbb{P}(Y)} = \frac{\mathbb{P}(G \cap Y \cap B) + \mathbb{P}(G \cap Y \cap C)}{\mathbb{P}(Y)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(G \mid Y \cap B)\mathbb{P}(Y \cap B) + \mathbb{P}(G \mid Y \cap C)\mathbb{P}(Y \cap C)}{\mathbb{P}(Y \cap B) + \mathbb{P}(Y \cap C)} = \frac{\frac{59}{60} \cdot \frac{60}{200} + \frac{21}{40} \cdot \frac{40}{200}}{\frac{60}{200} + \frac{40}{200}} = \frac{8}{10}\end{aligned}$$

e quindi si ottiene $\mathbb{P}(G \mid X) = \frac{9}{10} > \mathbb{P}(G \mid Y) = \frac{8}{10}$, al contrario del punto 2.

4. Perchè non è detto che se $\mathbb{P}(G \mid X \cap B) < \mathbb{P}(G \mid Y \cap B)$, e $\mathbb{P}(G \mid X \cap C) < \mathbb{P}(G \mid Y \cap C)$, allora $\mathbb{P}(G \mid X) > \mathbb{P}(G \mid Y)$. Una condizione sufficiente per questo può essere $\mathbb{P}(B \mid X) = \mathbb{P}(B \mid Y)$ (la tesi segue subito dalla formula delle probabilità totali per probabilità condizionate), che non era assolutamente verificata in questo caso:

$$\mathbb{P}(B \mid X) = \frac{\mathbb{P}(X \cap B)}{\mathbb{P}(X)} = \frac{\frac{90}{200}}{\frac{90}{200} + \frac{10}{200}} = \frac{9}{10} > \mathbb{P}(B \mid Y) = \frac{\mathbb{P}(Y \cap B)}{\mathbb{P}(Y)} = \frac{\frac{60}{200}}{\frac{60}{200} + \frac{40}{200}} = \frac{6}{10}$$

Esercizio 4.

1. Se $A \subseteq B$, allora $A \cap B = A$, e si ha

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$

se e solo se $\mathbb{P}(A) = 0$ oppure $\mathbb{P}(B) = 1$.

2. Calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c \cap B^c) &= \mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)\end{aligned}$$

3. Abbiamo

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \mathbb{P}((\cap_{i=1}^n A_i^c)^c) = 1 - \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i^c) = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c)$$

4. Poichè la media geometrica è minore o uguale della media aritmetica, abbiamo

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)}{n} \right)^n \leq \left(\frac{1}{n} \right)^n = n^{-n}$$

Esercizio 5. Una possibile costruzione per questo esperimento aleatorio è $\Omega := D_2^n = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i \in \{1, \dots, n\}\}$ con l'interpretazione che se $\omega_i \leq k$ allora la i -esima pallina è rossa; fissiamo poi $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}$ la legge uniforme su Ω . Allora abbiamo che $A_i := \{\omega \in \Omega \mid \omega_i \leq k\}$, e

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{k(n-1)}{n(n-1)} = \frac{k}{n}$$

Inoltre, $A_1 \cap A_2 = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 \leq k, \omega_2 \leq k\}$, quindi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{|A_1 \cap A_2|}{|\Omega|} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

Se A_1 e A_2 fossero indipendenti, avremmo che

$$\frac{k^2}{n^2} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

quindi $k = 0$ oppure $k(n-1) = n(k-1)$, che è vero se e solo se $k = n$, entrambe condizioni che avevamo escluso poichè $1 \leq k \leq n-1$. Da questo si desume che A_1 e A_2 non sono indipendenti.

A questa conclusione si poteva arrivare anche considerando la probabilità di A_2 condizionata ad A_1 : difatti

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\frac{k(k-1)}{n(n-1)}}{\frac{k}{n}} = \frac{k-1}{n-1}$$

che è uguale a $\mathbb{P}(A_2) = k/n$ se e solo se $k = n$, che era stato escluso fin dall'inizio. Poichè se A_1 e A_2 sono indipendenti e non trascurabili si ha che $\mathbb{P}(A_2|A_1) = \mathbb{P}(A_2)$, questo implica che A_1 e A_2 non sono indipendenti.

Esercizio 6. Innanzitutto definiamo gli eventi

$$\begin{aligned}D &:= \{ \text{il feto è Down} \}, \\T &:= \{ \text{la translucenza nucale è positiva} \}, \\B &:= \{ \text{il bitest è positivo} \}\end{aligned}$$

Possiamo riscrivere i dati come

$$\mathbb{P}(T|D) = 0.77, \quad \mathbb{P}(T|D^c) = 0.05, \quad \mathbb{P}(B|D) = 0.6, \quad \mathbb{P}(B|D^c) = 0.05$$

Dato che il test non fornisce informazioni in proposito, supponiamo che queste probabilità non cambino con l'età della donna. Infine, definendo $P := \{ \text{il test combinato è positivo} \}$, abbiamo che $P = T \cup B$.

1. Dobbiamo calcolare

$$\mathbb{P}(P|D) = \mathbb{P}(T \cup B|D) = 1 - \mathbb{P}(T \cap B|D) = 1 - \mathbb{P}(T|D)\mathbb{P}(B|D) = 1 - 0.23 \cdot 0.4 = 0.908$$

che in effetti è vicino allo 0.9 fornito nel testo: abbiamo qui usato il fatto che T e B sono condizionatamente indipendenti rispetto a D .

2. Siccome T e B sono condizionatamente indipendenti anche rispetto a D^c , abbiamo

$$\mathbb{P}(P|D^c) = \mathbb{P}(T \cup B|D^c) = 1 - \mathbb{P}(T \cap B|D^c) = 1 - \mathbb{P}(T|D^c)\mathbb{P}(B|D^c) = 1 - 0.95 \cdot 0.95 = 0.0975$$

che è invece quasi il doppio dello 0.05 fornito nel testo.

3. Utilizzando la formula di Bayes abbiamo

$$\mathbb{P}(D|P) = \frac{\mathbb{P}(P|D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(P|D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(P|D^c)\mathbb{P}(D^c)} = \frac{0.908 \cdot \frac{1}{187}}{0.908 \cdot \frac{1}{187} + 0.0975 \cdot \frac{186}{187}} = 0.0476$$

4. Utilizzando la formula di Bayes e l'informazione sull'indipendenza abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D|T \cap B) &= \frac{\mathbb{P}(T \cap B|D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T \cap B|D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T \cap B|D^c)\mathbb{P}(D^c)} = \\&= \frac{\mathbb{P}(T|D)\mathbb{P}(B|D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T|D)\mathbb{P}(B|D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T|D^c)\mathbb{P}(B|D^c)\mathbb{P}(D^c)} = \\&= \frac{0.77 \cdot 0.6 \cdot \frac{1}{187}}{0.77 \cdot 0.6 \cdot \frac{1}{187} + 0.05 \cdot 0.05 \cdot \frac{186}{187}} = \\&= \frac{0.77 \cdot 0.6}{0.77 \cdot 0.6 + 0.05 \cdot 0.05 \cdot 186} = \frac{0.462}{0.462 + 0.465} = \frac{0.462}{0.927} = 0.4983\end{aligned}$$