

Esercizi di Probabilità e Statistica della 3^a settimana
(Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Siano X, Y variabili aleatorie discrete, a valori in $\mathbb{N}$, con densità congiunta

$$p_{X,Y}(n, m) = c \frac{l^n \mu^m \nu^{nm}}{n! m!}$$

dove $l, \mu > 0$, $0 < \nu \leq 1$, e c è un'opportuna costante (quella per cui $\sum_{n,m} p_{X,Y}(n, m) = 1$).

1. Calcolare le densità marginali di X e Y .
2. Calcolare le probabilità condizionate $\mathbb{P}\{X = n | Y = m\}$.
3. Mostrare che gli eventi $\{X = n\}$, $\{Y = m\}$ sono indipendenti per ogni coppia $n, m \in \mathbb{N}$ se e solo se $\nu = 1$.

Esercizio 2. Si lancia ripetutamente una coppia di dadi non truccati e si sommano i risultati.

1. Si calcoli la probabilità di ottenere un 7 come somma.
2. Si calcoli la probabilità che occorranza meno di 6 lanci per ottenere almeno un 7.
3. Si calcoli la probabilità che occorranza più di 6 lanci per ottenere almeno un 7.

Esercizio 3. Un gioco a premi ha un montepremi di 512 Euro. Vengono poste ad un concorrente 10 domande. Ad ogni risposta errata il montepremi viene dimezzato. Alla prima risposta esatta il concorrente vince il montepremi rimasto. Se non si dà alcuna risposta esatta non si vince nulla. Un certo concorrente risponde esattamente ad una domanda con probabilità $p \in (0, 1)$, indipendentemente dalle risposte alle altre domande. Sia X la vincita di questo concorrente. Determinare la densità p_X di X .

Esercizio 4. Siano X e Y due variabili aleatorie discrete reali indipendenti, di densità rispettivamente p_X e p_Y .

1. Dimostrare che $X + Y$ ha densità

$$p_{X+Y}(z) = P\{X + Y = z\} = \sum_x p_X(x) p_Y(z - x) = \sum_y p_X(z - y) p_Y(y)$$

2. Se X e Y assumono valori nei numeri naturali, dimostrare che

$$p_{X+Y}(z) = \sum_{x=0}^z p_X(x) p_Y(z - x)$$

Esercizio 5. Un modello semplificato per le variazioni del prezzo delle azioni presume che ogni giorno il prezzo di una azione salga di una unità con probabilità p o scenda di una unità con probabilità $1 - p$. Si assume che le variazioni del prezzo in giorni diversi siano indipendenti. Calcolare la probabilità:

1. che il prezzo delle azioni torni a quello di partenza dopo 2 giorni;
2. che il prezzo delle azioni sia salito di una unità dopo 3 giorni;
3. che il prezzo delle azioni fosse salito il primo giorno, sapendo solo che dopo 3 giorni è salito di una unità.

Esercizio 6. Un'azienda produce occhiali utilizzando tre diversi macchinari. Il primo macchinario produce mediamente un paio di occhiali difettosi ogni 100, il secondo ogni 200, il terzo ogni 300. Gli occhiali vengono imballati in scatole identiche, contenenti 100 paia. Ogni scatola contiene occhiali scelti a caso tra quelli prodotti da una sola delle tre macchine. Si supponga che il primo macchinario abbia una produzione doppia rispetto agli altri due, cioè una scatola scelta a caso ha probabilità $1/2$ di essere prodotta dal primo macchinario, $1/4$ da secondo e $1/4$ dal terzo. Un ottico riceve una di queste scatole.

1. Qual è la probabilità che trovi almeno un paio di occhiali difettoso?
2. Se l'ottico trova esattamente due paia difettose, qual è la probabilità che gli occhiali siano stati prodotti dal primo macchinario?