Esercizi di Probabilità e Statistica della 4^a settimana
(Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{N}$. Trovare una relazione ricorsiva del tipo

$$\mathbb{P}\{X = k + 1\} = f(k)\mathbb{P}\{X = k\}$$

nei seguenti casi:

1. $X \sim B(n, p)$, con $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in (0, 1)$;
2. $X \sim Po(\lambda)$, con $\lambda > 0$;
3. $X \sim Ge(p)$, con $p \in (0, 1)$.

Esercizio 2. Un'amministratrice di ospedale vuole costruire una speciale nursery per bambini nati sottopeso (≤ 2500 g) e vuole avere un'idea del numero di letti da avere. L'amministratrice suppone che il periodo di ricovero di ogni neonato sia esattamente 4 giorni e quindi è interessata al numero atteso di nascite premature in questo periodo.

1. Se il numero X di nascite premature in un periodo di 4 giorni è distribuito secondo una legge binomiale di parametri $n = 15$ e $p = 0.1$, trovare la probabilità di avere 0, 1, 2, 3, 4, 5 nascite premature su questo periodo
2. Trovare i seguenti valori della funzione di ripartizione di X : $F_X(0)$, $F_X(1)$, $F_X(2)$, $F_X(3)$, $F_X(4)$, $F_X(5)$.
3. L'amministratrice vuole allestire x letti in modo che la probabilità di avere più di x parti prematuri su un periodo di 4 giorni sia meno di $\alpha = 5\%$. Qual è il più piccolo valore x che soddisfa questo criterio?
4. Rispondere al punto 3 con $\alpha = 1\%$.

Esercizio 3. Siano $X_1 \sim Po(\lambda_1)$, $X_2 \sim Po(\lambda_2)$ e $Y \sim Be(p)$ indipendenti.

1. Dimostrare che $X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.
2. Fissati $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq n$, calcolare

$$\mathbb{P}\{X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n\}$$

3. Supponiamo che $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, e poniamo $Z := YX_1 + X_2$: determinare le densità $p_{Y,Z}$ e p_Z .

Esercizio 4. Due dadi vengono lanciati separatamente più volte. Indichiamo con X il numero di lanci del primo dado necessari ad ottenere 1 e con Y il numero di lanci del secondo dado necessari ad ottenere 5 o 6.

1. Qual è la legge di X e di Y ?
2. Calcolare la densità di $Z := \max(X, Y)$ e di $W := \min(X, Y)$.
3. Calcolare $\mathbb{P}\{X \geq Y\}$.

Soluzioni su <http://www.math.unipd.it/~vargiolu/ProStat/>