

Esercizi di Probabilità e Statistica della 6^a settimana
(Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{N}$.

1. Dimostrare che

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X > n\}$$

2. Se $X \sim Ge(p)$, dimostrare che $\mathbb{E}[X] = 1/p$.

Esercizio 2. Il numero di uova deposte da un particolare insetto su una foglia è dato da una variabile aleatoria X di legge $Po(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Tuttavia, questa variabile può essere osservata solo se è positiva, poichè se vale 0 non possiamo sapere se l'insetto studiato fosse effettivamente presente su quella foglia. Se denotiamo con Y il numero osservato di uova, allora abbiamo che

$$\mathbb{P}\{Y = k\} = \mathbb{P}\{X = k | X > 0\}$$

Calcolare:

1. la densità discreta di Y ;
2. la sua media;
3. la sua varianza.

Esercizio 3. Si consideri un dado a 20 facce tutte uguali.

1. Qual è il risultato medio?
2. Quante volte è necessario lanciarlo affinché la probabilità di ottenere almeno un 20 sia maggiore o uguale a 0.5?
3. Lanciandolo 20 volte, qual è il numero medio di 20 ottenuti?
4. Lanciandolo 20 volte, qual è la probabilità effettiva di aver ottenuto almeno una volta 20?

Esercizio 4. Siano X e Y due variabili aleatorie con varianza finita dove X rappresenta una quantità “misurata” e Y una quantità non osservabile. Il problema che ci poniamo è di approssimare X tramite funzioni della Y . Limitandoci a funzioni affini di Y , il problema è di trovare la migliore approssimazione di X con variabili aleatorie della forma $aY + b$, dove $a, b \in \mathbb{R}$. Tra i molti possibili criteri di approssimazione, il più usato è quello in *media quadratica*, in cui si cerca di rendere più piccola possibile la quantità

$$\mathbb{E}[(X - aY - b)^2].$$

Determinare i coefficienti a e b che rendono minima tale quantità in questo modo.

1. Dimostrare che, se X ammette varianza finita, allora $\text{Var}[X + b] = \text{Var}[X]$ per ogni $b \in \mathbb{R}$.

2. Minimizzare in a l'espressione $\text{Var}[X - aY - b]$.
3. Per ogni a fissato, minimizzare in b l'espressione $\mathbb{E}[X - aY - b]^2$.
4. Quali sono gli (a, b) che minimizzano $\mathbb{E}[(X - aY - b)^2]$?