

Esercizi di Probabilità e Statistica della 7^a settimana
(Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1.

1. Dimostrare che, se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, con $\lambda > 0$, allora gode della proprietà di assenza di memoria: per ogni $s, t > 0$,

$$\mathbb{P}\{X > t + s \mid X > t\} = \mathbb{P}\{X > s\}$$

2. Dimostrare che se una variabile aleatoria reale positiva è tale che $\mathbb{P}\{X > t\} > 0$ per ogni $t \geq 0$ gode della proprietà dell'assenza di memoria nel senso specificato sopra, allora è esponenziale.

Esercizio 2. Il signor Jones è convinto che il tempo di vita di una automobile, in migliaia di km percorsi, sia una variabile aleatoria X con densità

$$f(t) = \begin{cases} 1/60 & \text{per } 0 \leq t \leq 60 \\ 0 & \text{per } t < 0 \text{ e } t > 60 \end{cases}$$

Il signor Smith ha una macchina usata da vendere, che ha percorso circa 15.000 km. Se il signor Jones decide di comprarla, che probabilità pensa di avere di fare almeno altri 30.000 km prima che sia da buttare?

Esercizio 3. Determinare la distribuzione del prodotto di due numeri aleatori generati indipendentemente con distribuzione uniforme in $[0, 1]$. In altre parole, se $X, Y \sim U(0, 1)$ indipendenti, determinare la distribuzione di XY .

1. Considerando le variabili aleatorie $Z = -\log X$ e $W = -\log Y$, trovarne la distribuzione.
2. Determinare la distribuzione di $Z + W$.
3. Trovare la distribuzione di $XY = e^{-(Z+W)}$.
4. Se $X_1, \dots, X_n \sim U(0, 1)$ indipendenti, qual è la distribuzione di $X_1 X_2 \cdots X_n$?

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = cxe^{-\frac{x^2}{2}} 1_{[0, +\infty)}(x),$$

dove c è una costante opportuna.

1. Calcolare il valore di c affinché f_X sia effettivamente una densità.
2. Determinare una funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tale che la variabile aleatoria $g(X)$ abbia distribuzione uniforme su $[0, 1]$.
3. Sia $Y = X^2$. Trovare la distribuzione di Y .

Esercizio 5. Un certo test nazionale di matematica viene proposto in tutte le ultime classi delle scuole secondarie. Esso produce punteggi che hanno distribuzione $N(500, 100^2)$. Si scelgano a caso 5 studenti che hanno affrontato il test. Calcola le probabilità che:

1. i loro punteggi siano tutti inferiori a 600;
2. esattamente tre punteggi siano superiori a 640.

Esercizio 6. Nei ragazzi (maschi) di 17 anni, la media $\pm$ deviazione standard della pressione diastolica supponiamo che la pressione in un dato ragazzo sia una variabile aleatoria gaussiana di parametri $m = 63.7$ e $\sigma = 11.4$, ci sono diversi approcci per diagnosticare una “pressione elevata”.

1. Un approccio diagnostica “pressione elevata” se la pressione diastolica supera il quantile di ordine 0.9 della distribuzione citata sopra. Dire a quanto corrisponde questa soglia.
2. Un altro approccio diagnostica “pressione elevata” se la pressione diastolica supera i 90 mm Hg. Che percentuale di ragazzi di 17 anni avrà pressione elevata con questo approccio?
3. Qual è la probabilità di trovare, tra 5 ragazzi, più di uno con la pressione elevata se si segue l’approccio del punto 2.?