Esercizi di Probabilità e Statistica della 8^a settimana
(Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ siano $(X_n)_n$ variabili aleatorie reali i.i.d. di legge $N(0,1)$. Posto $S_n := X_1^2 + \ldots + X_n^2$, si risponda alle seguenti domande:

1. dimostrare che $X_1^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, e dedurne la legge di S_n?
2. calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} P\{S_n > \sqrt{n}\}$
3. calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} P\{S_n > n\}$
4. calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} P\{S_n > n + \sqrt{2n}\}$

Suggerimento: per il punto 2., usare la legge dei grandi numeri. Per i punti 3. e 4., usare il fatto che $E[X_1^4] = 3$.

Esercizio 2. Consideriamo una successione di variabili aleatorie $(X_i)_i$ i.i.d. di legge geometrica di parametro p, e per ogni $n \geq 1$ definiamo le variabili aleatorie

$$T_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad Y_n := \frac{T_n}{n}, \qquad Z_n := \frac{pT_n - n}{\sqrt{n}}$$

Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{T_n > \frac{n}{p}\}$;
2. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{Y_n > \frac{n}{p}\}$;
3. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{Z_n > \sqrt{1-p}\}$.

Esercizio 3. Le durate in vita di n nuclei atomici radioattivi contenuti in una massa di materiale al tempo 0 si possono rappresentare con n variabili aleatorie esponenziali $X_1, \ldots, X_n$ indipendenti e di parametro λ. Per un dato periodo di tempo $t > 0$:

1. Definire due variabili aleatorie V_t^n e Z_t^n che rappresentino rispettivamente la proporzione dei nuclei ancora "in vita" (cioè radioattivi) all'istante t e il numero di decadimenti fino all'istante t.
2. Dimostrare che V_t^n converge verso una costante v_t e calcolarla.
3. Detta τ la vita media del generico nucleo radioattivo, esprimere v_t in funzione di τ e di t.
4. Facendo l'ipotesi che n sia "grande" e t/τ "piccolo", dimostrare che la probabilità che nell'intervallo di tempo t non ci sia nessun decadimento è circa $e^{-\frac{nt}{\tau}}$.
5. Si calcoli l'unico valore $\bar{t}$ per cui risulta $v_t = 1/2$ (ossia il cosiddetto tempo di dimezzamento del nucleo radioattivo in questione).

Esercizio 4. Possediamo 100 lampadine il cui tempo di vita è rappresentato da variabili aleatorie esponenziali indipendenti di media pari a 500 ore. Se le lampadine vengono usate una alla volta, rimpiazzando immediatamente la lampadina che si fulmina con un'altra nuova.

1. Che media e deviazione standard ha la variabile aleatoria "durata totale delle lampadine"?
2. Qual è la probabilità che ci sia ancora almeno una lampadina funzionante dopo 52500 ore?

Esercizio 5. Supponiamo di voler reclutare dei soggetti per uno studio sull'ipertensione e di sapere che il 10% della popolazione è iperteso. Per lo studio occorrono 100 ipertesi.

1. Se si reclutano 1000 soggetti, quale sarà la probabilità di avere più di 100 ipertesi nel nostro campione?
2. Quante persone bisogna reclutare per avere almeno il 90% di probabilità di avere almeno 100 ipertesi nel nostro campione?

Esercizio 6. Si supponga che il peso (in tonnellate) di un autoveicolo si distribuisca come una variabile aleatoria di media 3 e deviazione standard 0.3. Nel seguito, supporremo di poter applicare l'approssimazione normale.

1. Se consideriamo n autoveicoli, con che variabile aleatoria possiamo approssimare il peso totale?
2. Supponiamo che la portata della campata di un ponte sia 400 tonnellate, prima di riportare danni strutturali. Se il numero massimo di veicoli che ci possono transitare contemporaneamente è uguale a 100, qual è la probabilità che si possa danneggiare?
3. Rispondere alla stessa domanda supponendo che la portata della campata sia una variabile aleatoria gaussiana di media 400 e di deviazione standard 40.

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/ProStat/`