

Esercizi di Probabilità e Statistica della 8^a settimana
(Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Supponiamo di voler studiare la relazione tra abuso di analgesici e livello di creatinina nel sangue. In particolare, consideriamo 15 persone che lavorano in una fabbrica e sono conosciuti per “abuso di analgesici” (cioè più di 10 pillole al giorno) e misuriamo il loro livello di creatinina, con i seguenti risultati:

0.9, 1.1, 1.6, 2.0, 0.8, 0.7, 1.4, 1.2, 1.5, 0.8, 1.0, 1.1, 1.4, 2.2, 1.4

1. Stimare media e deviazione standard del livello di creatinina in base ai dati sopra.
2. Calcolare l'intervallo di confidenza asintotico al 95% del livello medio di creatinina.
3. Supponiamo ora di sapere che nella popolazione “normale” il livello di creatinina sia 1.0. È plausibile che ci sia una differenza nella media dei livelli di creatinina nel sangue nel gruppo considerato?

Esercizio 2. Si dispone delle seguenti osservazioni circa i soldati dell'antico esercito prussiano uccisi da un calcio di cavallo, in un anno, nei diversi battaglioni:

n. di morti in un anno in un battaglione	0	1	2	3	4	Totale
n. di battaglioni in cui si è verificato questo	109	65	22	3	1	200

Vogliamo vedere se è ragionevole ritenere che il numero di morti in un anno in un battaglione segua una legge di Poisson.

1. Supponendo che il numero dei morti nei 200 battaglioni sia un campione di taglia 200 di variabili di Poisson, stimare il parametro λ (suggerimento: ricordare che per una variabile di Poisson il parametro è uguale alla media). Questa stima è corretta? È consistente?
2. Sia $X \sim Po(\lambda)$, con λ uguale alla quantità stimata al punto precedente; calcolare $\mathbb{P}\{X = 0\}$, $\mathbb{P}\{X = 1\}$, $\mathbb{P}\{X = 2\}$, $\mathbb{P}\{X \geq 3\}$.
3. Supponendo di avere 200 variabili aleatorie di Poisson indipendenti, calcolare il numero atteso di variabili aleatorie che sono uguali rispettivamente a 0, 1, 2 e maggiori di 3.
4. La legge di Poisson stimata è una buona modellizzazione del fenomeno?

Esercizio 3. Nelle elezioni comunali del 2004 a Padova, Flavio Zanonato era stato eletto sindaco al primo turno (ricordiamo che la vittoria al primo turno si ottiene solo se il candidato ha la maggioranza assoluta dei voti). Vogliamo ora vedere se questo risultato era prevedibile attraverso un sondaggio fatto 15 giorni prima. Dal sondaggio, condotto su 902 persone, è risultato che il 51.5% avrebbe votato Zanonato, e il 48.5% avrebbe votato altri candidati.

1. Definire un modello statistico per stimare il parametro $p =$ “percentuale degli elettori che voteranno Zanonato al primo turno”.
2. Considerando lo stimatore $\hat{p} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, dire se è corretto, consistente e/o asintoticamente normale.

3. Calcolare l'intervallo di confidenza asintotico al 95% per p .
4. Dire se in base a questo intervallo si poteva prevedere la vittoria di Zanonato al primo turno.

Esercizio 4. Consideriamo un modello statistico in cui il campione $(X_n)_n$ ha legge $U(0, \theta)$ sotto P_θ , $\theta \in \Theta := \mathbb{R}^+$. Definiamo

$$Y_n := \max(X_1, \dots, X_n).$$

1. Calcolare funzione di ripartizione e densità di Y_n .
2. Dedurre che Y_n , se considerato quale stimatore di θ , non è corretto, e che è invece corretto lo stimatore $\tilde{Y}_n := \frac{n+1}{n}Y_n$.
3. Dimostrare che Y_n è consistente, e dedurre che anche \tilde{Y}_n lo è.
4. Y_n è asintoticamente normale?