

Probabilità e Statistica

Tiziano Vargiolu

(dall'originale di Paolo Dai Pra)

Il calcolo delle probabilità è una disciplina matematica che ha circa 500 anni di storia, e nel corso di tutto questo tempo ci sono stati vari approcci ad essa. In particolare nel XX secolo, sia per applicazioni che venivano per la maggior parte (ma non solo) dalla fisica, sia per la crescente esigenza di dimostrazioni rigorose di “fenomeni matematici” conosciuti da tempo, sono stati proposti più approcci per formalizzare il calcolo delle probabilità. Matematicamente parlando, questi approcci si possono ricondurre a due formalizzazioni, di cui di fatto oggi si usa solo una. Questa formalizzazione “vincitrice” è quella di Kolmogorov, che negli anni '30 riconduce gli assiomi del calcolo delle probabilità a quelli della teoria della misura, formalizzata una decina di anni prima nella generalità che conosciamo ora. L'altra formalizzazione che citiamo è quella dell'italiano Bruno de Finetti, che di fatto rifiuta di usare la teoria della misura e propone una probabilità finitamente additiva, oltre ad un modo totalmente diverso di vedere le variabili aleatorie. Citiamo questa cosa solo come nota storica, in quanto da ora in poi seguiremo strettamente l'approccio di Kolmogorov, che ormai è l'approccio standard al moderno calcolo delle probabilità.

Indice

1	Spazi di probabilità discreti	1
1.1	Generalità	1
1.2	Proprietà fondamentali	5
1.3	Spazi di probabilità uniformi e applicazioni del calcolo combinatorio alla probabilità	9
1.4	Probabilità condizionata	14
1.5	Indipendenza	19
2	Variabili aleatorie discrete	26
2.1	Variabili aleatorie e loro distribuzioni	26
2.2	Variabili aleatorie discrete	27
2.3	Densità discreta. Densità congiunta e densità marginali.	28
2.4	Il valor medio	31
2.5	Momenti, varianza, distanza in media quadratica, funzione generatrice dei momenti .	36
2.6	Disuguaglianze	41
2.7	Covarianza e coefficiente di correlazione	44
2.8	Indipendenza di variabili aleatorie	47
2.9	Alcuni esempi rilevanti di variabili aleatorie discrete	50
2.9.1	Variabili aleatorie di Bernoulli	50
2.9.2	Variabili aleatorie binomiali	51
2.9.3	Variabili aleatorie geometriche	51
2.9.4	Variabili aleatorie di Poisson	53
2.9.5	Funzione di ripartizione. Massimo e minimo di variabili aleatorie indipendenti	55
3	Spazi di probabilità generali. Variabili aleatorie assolutamente continue	61
3.1	Il discreto non basta	61
3.2	Variabili aleatorie	65
3.3	Valor medio (cenni)	66
3.4	Variabili aleatorie assolutamente continue	67
3.5	Esempi di variabili aleatorie assolutamente continue	71
3.5.1	Variabili aleatorie uniformi	71
3.5.2	Variabili aleatorie Gamma. Variabili aleatorie esponenziali	71
3.5.3	Variabili aleatorie normali o gaussiane	74
3.6	Calcoli con densità; trasformazione di variabili aleatorie	75

4	Teoremi limite classici	82
4.1	La Legge dei Grandi Numeri	82
4.1.1	Il metodo Monte Carlo	83
4.2	Il Teorema limite centrale	86
4.3	Funzione di ripartizione della distribuzione normale $N(0, 1)$	92
A	Complementi	93
A.1	Invertire la funzione di ripartizione: quantili	93
A.2	Somme di variabili aleatorie indipendenti e funzione generatrice dei momenti	97

Capitolo 1

Spazi di probabilità discreti

1.1 Generalità

Nel corso di questo libro con la dicitura **esperimento aleatorio** indicheremo un'osservazione relativa ad un qualunque fenomeno (fisico, economico, sociale,...) per il quale il risultato di tale osservazione non sia determinabile con certezza a priori. Il primo passo nella descrizione matematica di un esperimento aleatorio, ossia nella definizione di un **modello probabilistico**, consiste nell'identificare un insieme Ω che contiene tutti gli esiti possibili dell'esperimento. Tale insieme Ω verrà chiamato **spazio campionario**.

Esempi 1.1.1 Possibili esempi di esperimenti aleatori possono essere:

- i. lancio di un dado a sei facce. Spazio campionario $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ii. rilevazione del numero di accessi in un giorno ad un sito web. Scelte possibili per lo spazio campionario sono $\Omega = \mathbb{N}$ oppure $\Omega = \{0, 1, \dots, 10^{10}\}$.
- iii. misurazione del tempo di attesa per l'accesso ad uno sportello di un ufficio postale. Spazio campionario: $\Omega = [0, +\infty)$.
- iv. quotazione di un titolo azionario in una borsa ad un dato istante. Spazio campionario: $\Omega = (0, +\infty)$.

Il secondo oggetto che occorre introdurre è una famiglia di sottoinsiemi di Ω che riteniamo “significativi” per i nostri scopi e che chiameremo **eventi**. Negli esempi *i*) e *ii*) visti sopra, ogni possibile risultato può essere significativo, così come ogni possibile sottoinsieme dei possibili risultati di $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (nel caso del lancio di un dado) o di $\mathbb{N}$ (nel caso degli accessi al sito web). Negli esempi *iii*) e *iv*), invece, potrebbe essere significativo voler studiare i possibili eventi “si attende meno di un'ora”, oppure “il prezzo del titolo azionario alle 12 era compreso tra 3.85 e 3.95 Euro”, mentre lo studio di insiemi più “strani” (come “il tempo di attesa allo sportello è la soluzione di una equazione trascendente”) potrebbero non essere altrettanto significativi per i nostri scopi. Possiamo quindi fissare una famiglia di sottoinsiemi di Ω che vale la pena studiare, richiedendo anche che tale famiglia sia stabile rispetto alle comuni operazioni insiemistiche di unione, intersezione e complemento. Nel seguito, indicheremo con $\mathcal{P}(\Omega)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di Ω e con A^c il complementare di A rispetto a Ω , cioè $\Omega \setminus A$.

Definizione 1.1.1 Sia Ω un insieme, e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Diciamo che $\mathcal{A}$ è una σ -algebra se

- i. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- ii. Se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^c \in \mathcal{A}$.
- iii. Se $(A_n)_{n \geq 0}$ è una successione di elementi di $\mathcal{A}$, allora $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Si noti che, per i. e ii., $\Omega \in \mathcal{A}$. Inoltre $\mathcal{A}$ è chiuso per unione finita (ogni famiglia finita $\{A_1, \dots, A_n\}$ di elementi di $\mathcal{A}$ può essere completata in una successione ponendo $A_k = \emptyset$ per $k > n$, senza modificarne l'unione). Infine usando l'identità $\bigcap_n A_n = (\bigcup_n A_n^c)^c$, si vede che una σ -algebra è chiusa per intersezione, sia nel caso di una famiglia finita che nel caso di una successione.

Nel seguito, una coppia $(\Omega, \mathcal{A})$ formata da un insieme e da una σ -algebra di suoi sottoinsiemi verrà chiamata **spazio misurabile**.

Il terzo ingrediente di un modello probabilistico è l'assegnazione di un "grado di fiducia", o *probabilità*, ai sottoinsiemi dello spazio campionario che sono contenuti nella σ -algebra degli eventi. Con riferimento agli Esempi 1.1.1, si vuol dare significato ad espressioni quali "probabilità che il numero ottenuto col dado sia maggiore o uguale a 5", o "probabilità che il numero di accessi al sito web sia minore di 100", o "probabilità che il tempo di attesa sia compreso tra 3 e 10 minuti".

Vedremo più avanti in alcuni casi concreti come, sulla base di considerazioni sulla natura dell'esperimento aleatorio in esame, la scelta della probabilità risulti talvolta "naturale". Molto spesso, però, non è così, e in ogni caso il modello probabilistico scelto va sottoposto a verifica sulla base di dati sperimentali ottenuti da ripetizioni successive dell'esperimento. Tale problema di verifica è uno degli obbiettivi principali della *Statistica*.

Comunque essa venga assegnata, ogni probabilità dovrà soddisfare ad alcune proprietà, in parte naturali. Tali proprietà risultano semplici da controllare nel caso in cui lo spazio campionario Ω sia finito o numerabile. Rimuovendo tale ipotesi, alcune questioni legate alla probabilità (come ad esempio esistenza ed unicità) divengono più delicate. Tale caso generale verrà considerato più avanti nel Capitolo 3.

Definizione 1.1.2 Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Una funzione

$$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

si dice **probabilità** o **misura di probabilità** se sono soddisfatte le due seguenti proprietà:

P1.

$$P(\Omega) = 1.$$

P2. (σ -**additività**) Per ogni successione $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti, si ha

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dove $(\Omega, \mathcal{A})$ è uno spazio misurabile e P è una probabilità su $(\Omega, \mathcal{A})$, verrà chiamata **spazio di probabilità**, o **spazio probabilizzato**.

Facciamo ora qualche commento sulla definizione di probabilità. La proprietà P1 esprime il fatto che l'intero spazio campionario è un evento **certo**, ossia ha probabilità uno. La proprietà P2 è quella che contraddistingue la moderna teoria della probabilità "alla Kolmogorov" (dagli anni '30 in poi), e richiede una discussione più accurata. Iniziamo col dedurre due conseguenze degli assiomi P1 e P2.

Lemma 1.1.3 Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio probabilizzato. Allora valgono le seguenti proprietà:

(i) $P(\emptyset) = 0$.

(ii) se $k \geq 2$ e $A_1, A_2, \dots, A_k$ sono eventi a due a due disgiunti, allora

$$(1.1.1) \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{j=1}^k P(A_j) \quad (\text{additività finita})$$

Dimostrazione.

(i) Poichè $\emptyset = \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset$ e l'unione è ovviamente disgiunta, si ha che

$$P(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset) = P(\emptyset) \cdot (+\infty)$$

Siccome $P(\emptyset)$ deve essere un numero reale, l'unica possibilità è che $P(\emptyset) = 0$.

(ii) Prolunghiamo la famiglia di eventi disgiunti $A_1, A_2, \dots, A_k$ in una successione infinita di eventi disgiunti ponendo $A_n = \emptyset$ per $n > k$. Allora, per l'assioma P2

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(A_j) = \sum_{j=1}^k P(A_j) + \sum_{j=k+1}^{\infty} P(A_j) = \\ &= \sum_{j=1}^k P(A_j) + \sum_{j=k+1}^{\infty} 0. \end{aligned}$$

■

Una domanda naturale è se (P2) nella Definizione 1.1.2 si possa sostituire con la proprietà (1.1.1), più “naturale” e detta *additività finita*. La risposta è ovviamente negativa (anche se la dimostrazione non è così ovvia), ma questa domanda è all'origine di una variante della teoria della probabilità, il cui esponente principale è stato l'italiano Bruno de Finetti. Nella letteratura matematica è ampiamente sviluppata la teoria della probabilità finitamente additiva, teoria motivata da diverse applicazioni. Nel seguito tuttavia svilupperemo solo la versione “ σ -additiva” della probabilità. Ovviamente, se Ω è finito, non vi sono successioni infinite di eventi disgiunti e non vuoti, in quanto $\mathcal{P}(\Omega)$ ha un numero finito di elementi, e dunque in questo caso P2 e (1.1.1) sono equivalenti.

La seguente osservazione già suggerisce una implicazione rilevante della σ -additività. In sostanza, si mostra che, in uno spazio di probabilità discreto, la probabilità di ogni evento è determinata dalla “probabilità dei suoi elementi”.

Osservazione importante. Abbiamo definito la probabilità come una funzione definita su $\mathcal{A}$. Se Ω è finito o numerabile e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (diciamo in questo caso che Ω è uno spazio **discreto**), si può assegnare inizialmente una probabilità ai singoli elementi di Ω (detti anche **singoletti**). In altre parole, supponiamo di assegnare una funzione $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tale che

$$(1.1.2) \quad \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Se $A \subseteq \Omega$, possiamo definire

$$(1.1.3) \quad P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

È facile anche se piuttosto noioso mostrare che tale P è effettivamente una probabilità, cioè gli assiomi P1 e P2 sono soddisfatti. È anche possibile percorrere il cammino inverso. Cioè se P è una probabilità, possiamo definire $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tramite

$$p(\omega) = P(\{\omega\}).$$

Usando l'assioma P2, si vede facilmente che (1.1.2) e (1.1.3) valgono. In particolare, questo argomento mostra che in uno spazio di probabilità discreto, la probabilità è determinata dal suo valore sugli eventi costituiti da un solo elemento di Ω . Per gli spazi di probabilità più generali che vedremo più avanti, quest'ultima affermazione non è necessariamente vera.

Concludiamo questo paragrafo con alcuni esempi di spazi probabilizzati.

Esempio 1.1.2 Sia Ω un insieme finito, e definiamo $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Per $A \in \mathcal{A}$, definiamo

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

ove $|\cdot|$ indica il numero di elementi di un insieme. Si vede facilmente che P è una probabilità, che corrisponde, con riferimento alla definizione (1.1.3), alla scelta $p(\omega) \equiv 1/|\Omega|$ per ogni $\omega \in \Omega$. Lo spazio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ così definito si dice **spazio di probabilità uniforme**. Esso è il modello probabilistico adeguato a descrivere gli esperimenti aleatori in cui tutti gli esiti si possono ritenere equiprobabili. Ad esempio: lancio di uno o più dadi, estrazione di un numero dalla ruota del lotto, la successione delle carte in un mazzo accuratamente mescolato ...

Esempio 1.1.3 Sia Ω un insieme finito, e $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione arbitraria. Fissato un parametro $\beta \geq 0$, definiamo

$$p(\omega) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta H(\omega)},$$

dove

$$Z(\beta) = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)}.$$

Si noti che (1.1.2) è verificata, e dunque è possibile definire P tramite (1.1.3). Denotiamo con P_β tale probabilità, al fine di mettere in evidenza la dipendenza da β . La probabilità P_β è detta anche **misura di Gibbs** relativa alla **funzione Hamiltoniana** (o **energia**) H e alla **temperatura inversa** β . Nel caso $\beta = 0$ (temperatura infinita), $p(\cdot)$ non dipende da ω , e pertanto P_0 è la probabilità uniforme su Ω . Consideriamo invece il limite di temperatura zero (assoluto), cioè $\beta \rightarrow +\infty$. Sia $m = \min\{H(\omega) : \omega \in \Omega\}$, e

$$A = \{\omega \in \Omega : H(\omega) = m\}.$$

In altre parole, interpretando $H(\omega)$ come l'energia di ω , A è l'insieme degli elementi di Ω con minima energia. Mostriamo ora che

$$(1.1.4) \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} P_\beta(A) = 1.$$

In altre parole, nel limite $\beta \rightarrow +\infty$, P_β si “concentra” sugli elementi di minima energia. Per dimostrare (1.1.4) è sufficiente (perché?) mostrare che, per ogni $\omega \notin A$,

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} P_\beta(\{\omega\}) = 0.$$

Si noti che

$$P_\beta(\{\omega\}) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta H(\omega)},$$

e che

$$Z(\beta) \geq e^{-\beta m}.$$

Pertanto

$$(1.1.5) \quad P_\beta(\{\omega\}) \leq \frac{e^{-\beta H(\omega)}}{e^{-\beta m}} = e^{-\beta[H(\omega)-m]}.$$

Essendo $\omega \notin A$, si ha $H(\omega) > m$, e (1.1.4) segue immediatamente da (1.1.5).

Esempio 1.1.4 Sia $\Omega = \mathbb{N}$, e poniamo

$$p(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!},$$

dove $\lambda > 0$ è fissato. Si noti che (1.1.2) è verificata, e dunque è possibile definire P tramite (1.1.3). Come vedremo in seguito, tale probabilità è particolarmente utile nella descrizione delle *file di attesa*.

Esempio 1.1.5 Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ un qualunque spazio misurabile e consideriamo $\omega_0 \in \Omega$. Definiamo

$$P_{\omega_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega_0 \in A \\ 0 & \text{se } \omega_0 \notin A \end{cases} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

La P_{ω_0} è una probabilità nota come **delta di Dirac nel punto** ω_0 , o anche **legge (degenere) concentrata in** ω_0 .

1.2 Proprietà fondamentali

Iniziamo coll'espore alcune conseguenze quasi immediate degli assiomi P1 e P2. Qui e nel seguito, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ è uno spazio di probabilità.

Proposizione 1.2.1 *Siano $A, B \in \mathcal{A}$. Allora valgono le seguenti proprietà:*

(i)

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

(ii) *Se $A \subseteq B$ allora*

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

In particolare

$$P(A) \leq P(B).$$

(iii)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

In particolare

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

Dimostrazione.

(i) Per la proprietà di additività si ha

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c),$$

da cui la conclusione è immediata.

(ii) Basta osservare che, di nuovo per l'additività,

$$P(B) = P[A \cup (B \setminus A)] = P(A) + P(B \setminus A).$$

(iii) Scriviamo

$$A \cup B = [A \setminus (A \cap B)] \cup [B \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B).$$

I tre eventi nella precedente unione sono disgiunti. Dunque, usando l'additività e la (ii)

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P[A \setminus (A \cap B)] + P[B \setminus (A \cap B)] + P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

■

Va notato come le dimostrazioni dei risultati della Proposizione 1.2.1 usino solo l'additività e non la σ -additività, che invece gioca un ruolo nella seguente.

Proposizione 1.2.2 *Sia $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ una funzione che soddisfa P1 e l'additività in (1.1.1). Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

a) P è σ -additiva.

b) Se $(A_n)_{n \geq 1}$ è una successione crescente di eventi, cioè $A_n \subseteq A_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$, allora

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

c) Se $(A_n)_{n \geq 1}$ è una successione decrescente di eventi, cioè $A_{n+1} \subseteq A_n$ per ogni $n \geq 1$, allora

$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Dimostrazione. $(a) \Rightarrow (b)$. Per una data successione crescente (A_n) di eventi, definiamo un'altra successione (B_n) tramite $B_1 = A_1$, e $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ per $n \geq 2$. Evidentemente, gli eventi B_n sono a due a due disgiunti e, per ogni $n \geq 1$,

$$\bigcup_{k=1}^n B_k = A_n$$

e quindi

$$\bigcup_{n \geq 1} B_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n.$$

Allora, per la σ -additività,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) = \sum_{n \geq 1} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n P(B_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

$(b) \Rightarrow (a)$. Sia (A_n) una successione di eventi a due a due disgiunti. Notando che la successione (B_n) , con $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$, è crescente, e usando l'additività finita e la b_* , si ha:

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = P\left(\bigcup_n B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n P(A_k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

$(b) \Rightarrow (c)$. Sia (A_n) una successione decrescente di eventi. Posto $B_n = A_n^c$, (B_n) è una successione crescente di eventi. Allora, usando b_* , si ha

$$P\left(\bigcap_n A_n\right) = P\left[\left(\bigcup_n B_n\right)^c\right] = 1 - P\left(\bigcup_n B_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

$(c) \Rightarrow (b)$. Del tutto simile all'implicazione precedente. Si lasciano i dettagli al lettore. ■

La proprietà (b) della Proposizione 1.2.2 viene detta **continuità dal basso**, e la (c) **continuità dall'alto**.

Un utile corollario della Proposizione 1.2.2 è il seguente.

Corollario 1.2.3 Sia $(A_n)_{n \geq 1}$ una successione di eventi (non necessariamente disgiunti a 2 a 2). Allora

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Dimostrazione. Sia $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Evidentemente (B_n) è una successione crescente di eventi. Inoltre $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$. Per la parte (iii) della Proposizione 1.2.1, sappiamo che $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$. Con una facile dimostrazione per induzione, la precedente disuguaglianza si estende a:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

Ma allora, usando anche la Proposizione 1.2.2 si ha

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = P\left(\bigcup_n B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n P(A_k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

■

Esercizi

Esercizio 1 Esprimere ciascuno dei seguenti eventi in termini degli eventi A, B, C .

1. Almeno un evento si verifica.
2. Al più un evento si verifica.
3. Nessun evento si verifica.
4. Tutti gli eventi si verificano.
5. Si verifica esattamente un evento.
6. Due eventi su tre si verificano.
7. O si verifica A , oppure, se non si verifica A , neppure B si verifica.

Esercizio 2 Siano A, B due eventi arbitrari.

a. Mostrare che

$$P(A)P(A^c) \leq \frac{1}{4}.$$

b.* Mostrare che

$$P(A \cap B) \leq P(A)P(B) + \frac{1}{4}.$$

Esercizio 3 Siano A, B eventi, e definiamo

$$A \Delta B := \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ o } \omega \in B \text{ ma non ad entrambi} \}$$

1. Mostrare che $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
2. Mostrare che

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Esercizio 4 Siano A, B, C tre eventi. Mostrare che

$$P(A \Delta C) \leq P(A \Delta B) + P(B \Delta C).$$

Quando vale l'uguaglianza?

1.3 Spazi di probabilità uniformi e applicazioni del calcolo combinatorio alla probabilità

Ricordiamo che uno spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si dice **uniforme** se Ω è un insieme finito, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. Pertanto, il calcolo della probabilità di un evento in uno spazio uniforme si riduce a contarne il numero di elementi. I problemi di conteggio, anche in insiemi abbastanza semplici, sono tutt'altro che banali, e vanno affrontati con attenzione. Lo strumento matematico fondamentale in questo contesto è il *calcolo combinatorio*. In questo testo si assume che il lettore abbia familiarità con le nozioni più elementari del calcolo combinatorio. Al solo scopo di rinfrescare la memoria, ricordiamo quanto segue.

Sia A un insieme, con $|A| = n$. Indichiamo con S_n l'insieme delle **permutazioni** di A , cioè l'insieme delle funzioni biettive di A in A . Allora

$$|S_n| = n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

Se $n = 0$, cioè $A = \emptyset$, si pone, per definizione, $0! = 1$.

Sia ora $C_{n,k} = \{E \subseteq A : |E| = k\}$. Il numero di elementi di $C_{n,k}$ viene indicato col simbolo $\binom{n}{k}$, detto **coefficiente binomiale**, e si ha, per $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ovviamente, se $k < 0$ o $k > n$ allora $\binom{n}{k} = 0$.

Infine, sia B un altro insieme con $|B| = m$. Posto

$$A^B = \{f : f \text{ è una funzione da } B \text{ in } A\},$$

si ha

$$|A^B| = n^m.$$

Presentiamo infine un utile principio che spesso aiuta il calcolo in molti problemi combinatori.

Principio di enumerazione. Se si eseguono r esperimenti, di cui il primo esperimento ammette n_1 esiti possibili, per ognuno dei quali il secondo esperimento ammette n_2 esiti possibili; inoltre, se per ogni combinazione di esiti dei primi 2 esperimenti il terzo ammette n_3 e così via; supponendo che sequenze distinte di esiti degli r esperimenti producono esiti finali distinti, allora vi sono un totale di $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r = \prod_{i=1}^r n_i$ combinazioni di esiti degli r esperimenti considerati tutti insieme.

In questo paragrafo verranno illustrati alcuni esempi di applicazione del calcolo combinatorio in problemi di probabilità modellizzabili con spazi uniformi.

Esempio 1.3.1 Supponiamo di voler costituire un comitato di due persone partendo da un gruppo di un uomo U e di due donne A e B . Ovviamente i possibili comitati saranno tre, e precisamente $\{(A, B), (U, A), (U, B)\}$. Se si trascurasse l'ipotesi che sequenze distinte di esiti debbano produrre esiti finali distinti, si potrebbe ragionare in questo modo: dato che il comitato è di due persone e l'uomo soltanto uno, ci sarà sicuramente una donna e quindi possiamo spezzare l'esperimento nelle due fasi estrazione di 1 donna con 2 esiti possibili e estrazione del secondo membro, con ancora 2 esiti distinti per ogni possibile esito del primo, ottenendo un totale di 4 possibili esiti! L'errore qui sta nel fatto che si producono gli esiti $\{(A, B), (A, U), (B, A), (B, U)\}$, dove chiaramente il primo e il terzo esito danno luogo allo stesso comitato. Bisogna quindi stare attenti a che tutte le ipotesi del principio siano soddisfatte!

Esempio 1.3.2 Si consideri un'urna contenente N palline, di cui m rosse e $N - m$ verdi, con $m \leq N$. Vengono estratte, simultaneamente, n palline, con $n \leq N$. Qual è la probabilità che esattamente k di esse siano rosse?

Per rispondere al quesito posto è necessario anzitutto scegliere un opportuno spazio campionario. Supponiamo di numerare le palline da 1 a N e, per fissare le idee, assumiamo che le palline rosse siano quelle numerate da 1 a m . La scelta di n palline si può identificare con la scelta di un sottoinsieme di n elementi dell'insieme $\{1, 2, \dots, N\}$. Sia dunque Ω la famiglia di tali sottoinsiemi. Poiché le scelte possibili si possono ritenere equiprobabili, scegliamo come probabilità P quella uniforme su Ω . Con tali convenzioni, l'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità è

$$A = \{\omega \in \Omega : |\omega \cap \{1, 2, \dots, m\}| = k\}.$$

Poiché $P(A) = |A|/|\Omega|$, osserviamo anzitutto che $|\Omega| = \binom{N}{n}$. Inoltre, scegliere un elemento di A equivale a scegliere, qualora possibile, k elementi da $\{1, 2, \dots, m\}$, e $n - k$ da $\{m + 1, \dots, N\}$. Dal principio di enumerazione segue che

$$|A| = \binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}.$$

Concludendo:

$$P(A) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Esempio 1.3.3 m passeggeri si distribuiscono in modo casuale in un treno con $n \geq m$ vagoni. Qual è la probabilità che almeno due di essi finiscano sullo stesso vagone?

Indichiamo con A l'insieme dei vagoni, e B l'insieme dei passeggeri. Lo spazio campionario naturale per questo esempio è $\Omega = A^B$: descrivere la disposizione dei passeggeri significa associare un vagone ad ogni passeggero. Sia E l'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità, cioè $E = \{f : B \rightarrow A : f \text{ non è iniettiva}\}$. Poiché la probabilità su Ω è quella uniforme, si tratta di contare gli elementi di E o, equivalentemente, di E^c , cioè dell'insieme delle funzioni iniettive di B in A . Una semplice applicazione del principio di enumerazione mostra che

$$|E^c| = n(n-1) \cdots (n-m+2)(n-m+1).$$

Concludiamo pertanto che

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{n(n-1) \cdots (n-m+2)(n-m+1)}{n^m}.$$

Esempio 1.3.4 Ad una votazione vi sono solo due candidati, che chiameremo A e B. Il candidato A riceve n voti, il candidato B ne riceve m , con $n > m$. Non vi sono schede nulle o bianche. Lo spoglio delle schede avviene una scheda per volta. Qual è la probabilità che ad ogni momento dello spoglio il candidato A sia in vantaggio sul candidato B o alla pari?

Per $i = 1, 2, \dots, n + m$, poniamo

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{se l}'i\text{-ma scheda scrutinata è per A} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il vettore $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+m})$ è una descrizione completa della successione delle schede scrutinate. Si noti che ognuno di tali vettori contiene n “uno” e m “meno uno”, il che equivale a dire (verificarlo!)

che $\xi_1 + \dots + \xi_{n+m} = n - m$. Poniamo dunque

$$\Omega = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+m}) : \sum_{i=1}^{n+m} \xi_i = n - m \right\}.$$

Poichè ogni possibile sequenza di schede scrutinate è da ritenersi equiprobabile, indichiamo con P la probabilità uniforme su Ω . Notare che un elemento di Ω corrisponde ad un sottoinsieme di n elementi di un insieme di $n + m$ elementi, e quindi $|\Omega| = \binom{n+m}{n}$. L'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità è

$$C = \left\{ \xi \in \Omega : \sum_{j=1}^i \xi_j \geq 0, \text{ per } i = 1, \dots, n + m \right\}.$$

Per contare gli elementi di C è opportuno dare una descrizione alternativa dell'insieme. Poniamo, per $i = 1, 2, \dots, n + m$,

$$y(i) = \sum_{j=1}^i \xi_j,$$

e, per convenzione, $y(0) = 0$. I punti $(i, y(i))$ si possono rappresentare in un piano cartesiano, e poi interpolare tramite segmenti rettilinei, come nella Figura 1.1 che segue.

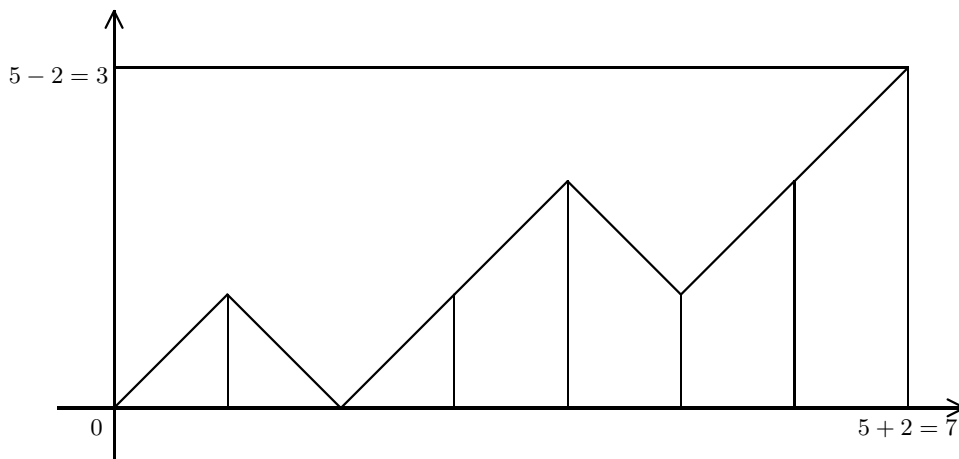


Figura 1.1: cammino corrispondente al caso $n = 5$, $m = 2$, e alla sequenza di schede estratte ABAABAA

Ciò che si ottiene è una curva continua, formata da tratti adiacenti di lunghezza $\sqrt{2}$ di rette di coefficiente angolare ± 1 , congiungente i punti $(0, 0)$ e $(n + m, n - m)$. Tali curve verranno chiamate **cammini**. Notare che assegnare un cammino tra $(0, 0)$ e $(n + m, n - m)$ è equivalente ad assegnare un vettore $\xi \in \Omega$. Possiamo dunque identificare Ω con la famiglia di tali cammini. Si noti, inoltre, che gli elementi dell'evento C corrispondono ai cammini che non intersecano mai la retta di equazione $y = -1$. Risulta più conveniente contare gli elementi di C^c , ossia il numero di cammini tra $(0, 0)$ e $(n + m, n - m)$ che intersecano la retta di equazione $y = -1$. A questo scopo, per $\xi \in C^c$, sia k il più piccolo valore per cui $\xi_1 + \dots + \xi_k = -1$. Ossia k è il più piccolo valore dell'ascissa per cui il cammino γ corrispondente a ξ interseca la retta $y = -1$. Definiamo allora γ^* come il cammino ottenuto da γ riflettendo rispetto alla retta $y = -1$ i punti di γ con ascissa minore di k , e lasciando invariati gli altri (vedi Figura 1.2).

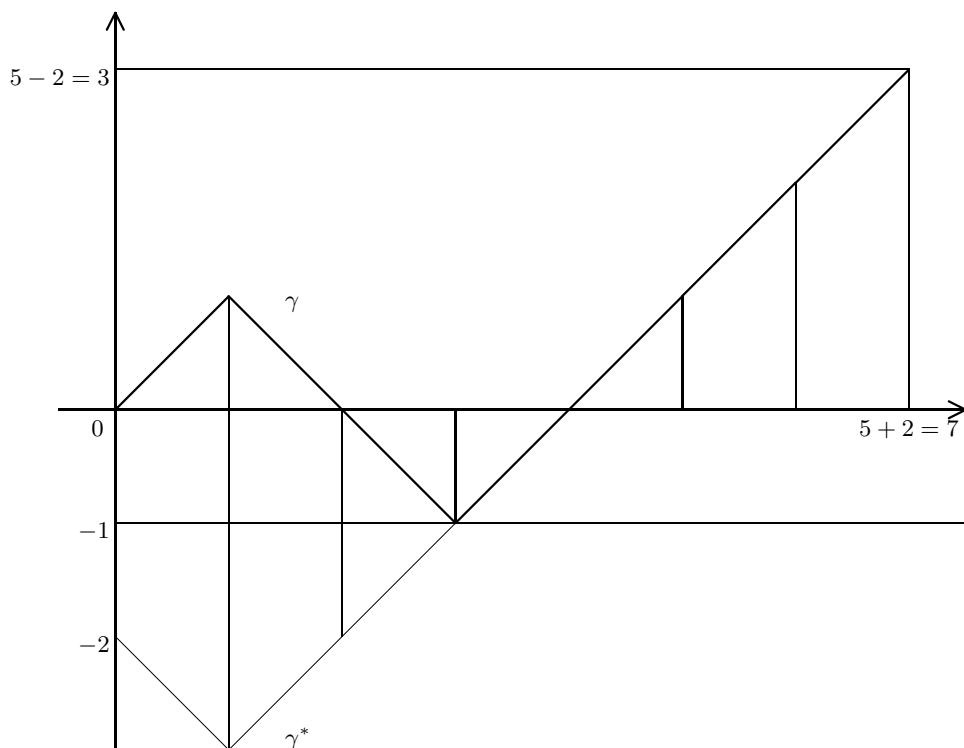


Figura 1.2: cammino γ corrispondente al caso $n = 5$, $m = 2$ e alla sequenza di schede estratte ABBAAAA, con il corrispondente cammino riflesso γ^*

Notare che γ^* è ancora un cammino, ma congiungente i punti $(0, -2)$ e $(n + m, n - m)$. La trasformazione $\gamma \rightarrow \gamma^*$ è invertibile: se δ è un cammino tra $(0, -2)$ e $(n + m, n - m)$ esso deve avere un punto d'intersezione con la retta $y = -1$; il ribaltamento di cui sopra può essere invertito per ottenere un cammino γ tale che $\gamma^* = \delta$. Ne segue che il numero di elementi di C^c è uguale al numero di cammini tra $(0, -2)$ e $(n + m, n - m)$. Questo numero, applicando un'ovvia traslazione, è uguale al numero di cammini tra $(0, 0)$ e $(n + m, n - m + 2) = (n + m, (n + 1) - (m - 1))$. Il conteggio di tali cammini è dunque analogo al conteggio dei sottoinsiemi formati da $n + 1$ elementi di un insieme di $n + m$ elementi. Ne segue allora che

$$|C^c| = \binom{n+m}{n+1}.$$

Infine

$$P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - \frac{\binom{n+m}{n+1}}{\binom{n+m}{n}} = \frac{n - m + 1}{n + 1}.$$

Esercizi

Esercizio 5 Da un mazzo di 52 carte si estraggono, a caso, tre carte. Calcolare la probabilità che:

- tra le carte estratte vi sia almeno un asso;
- le tre carte estratte siano di tre semi diversi;
- almeno due delle carte estratte abbiano lo stesso numero o figura.

Esercizio 6 Un mazzo di 52 carte viene diviso a metà. Si determini la probabilità che ognuna delle due parti contenga carte rosse e nere in egual numero.

Esercizio 7 Si mescola accuratamente un mazzo di 52 carte da Poker.

- a. Calcolare la probabilità che le prime due carte del mazzo siano rispettivamente l'asso e il due di fiori;
- b. Calcolare la probabilità che tra le prime dieci carte del mazzo non vi siano carte di fiori.

Esercizio 8 Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?

Esercizio 9 Si lanciano 12 dadi. Qual è la probabilità che ognuno dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 compaia esattamente 2 volte?

Esercizio 10 Alla biglietteria di un cinema ci sono $n+m$ persone in fila per acquistare un biglietto. Di esse, n hanno solo una banconota da 5 Euro, le altre m solo una banconota da 10 Euro. Il prezzo del biglietto è di 5 Euro. Assumendo che il cassiere, all'inizio, non abbia denaro, qual è la probabilità che ognuno dei clienti possa ricevere l'eventuale resto? (Confrontare con l'esempio 1.3.4)

Esercizio 11 n paia di guanti vengono mescolate, e poi distribuite a caso a n persone. Qual è la probabilità che ognuno riceva un guanto per la mano destra e uno per la sinistra?

Esercizio 12 Si scelgano, a caso, due numeri dall'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. Fissato $k \in \{2, \dots, n-1\}$, qual è la probabilità che i due numeri scelti siano uno strettamente più grande e uno strettamente più piccolo di k ?

Esercizio 13 Si considerino i numeri $\{1, 2, \dots, n\}$ e si esegua una permutazione casuale di essi. Qual è la probabilità che 1 e 2 siano successivi anche dopo la permutazione?

Esercizio 14 Si considerino n persone selezionate in modo casuale.

1. Calcolare la probabilità che almeno due di essi compiano gli anni lo stesso giorno.
2. Dimostrare che questa probabilità è una funzione crescente di n .
3. Quanto grande dev'essere n affinché questa probabilità sia maggiore di $1/2$?

Esercizio 15 Si supponga di avere un mazzo di n chiavi diverse. Dovendo aprire una serratura di cui si ha la chiave, si provano a caso le n chiavi, mettendo da parte quello già provate, fino a che non si è trovata la chiave giusta. Qual è la probabilità di trovare la chiave giusta dopo k tentativi, con $1 \leq k \leq n$?

Esercizio 16 21 passeggeri salgono su un treno della metropolitana vuoto formato da 3 vagoni, e ognuno sceglie a caso il vagone su cui viaggiare. Si calcoli la probabilità che

1. ci siano 4 passeggeri nel primo vagone;
2. i passeggeri siano uniformemente distribuiti sui 3 vagoni;
3. 5 persone siano su un vagone, 6 su un altro e 10 sul rimanente.

1.4 Probabilità condizionata

Nello studio di un modello probabilistico, risulta interessante studiare l'influenza che l'occorrere di un dato evento B ha sulla probabilità di occorrenza di un altro evento A .

Esempio 1.4.1 Nelle estrazioni per una ruota del Lotto, vengono estratte “a caso” 5 palline da un'urna contenente palline numerate da 1 a 90. Supponiamo di giocare due numeri su quella ruota, e precisamente l'1 e il 3. Una persona presente all'estrazione, mi avvisa che dei 5 numeri estratti 3 sono dispari. Qual è la probabilità di fare “ambo” sulla base di questa informazione? E qual è la probabilità in assenza di tale informazione?

È chiaro che la soluzione di tale problema richiede che si definisca il significato di calcolare una probabilità *sulla base* di una data informazione. Prima di proporre una definizione formale, cerchiamo una soluzione “ragionevole”. Lo spazio campionario in questione è Ω = “insieme di tutte le cinque di numeri tra 1 e 90”. Assumendo l'equità dell'estrazione, scegliamo come probabilità P quella uniforme. Due eventi compaiono nell'enunciato del problema: A = “i cinque numeri estratti contengono l'1 e il 3”, B = “dei cinque numeri estratti 3 sono dispari”. In assenza dell'informazione sull'occorrenza di B , scriveremmo semplicemente

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Poiché la scelta di un elemento di A corrisponde alla scelta di tre numeri diversi da 1 e 3, si ha che $|A| = \binom{88}{3}$, e quindi

$$P(A) = \frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{20}{8010} \simeq 0.0025.$$

Assumere l'occorrenza di B significa escludere la possibilità che la quinta estratta non sia in B . Inoltre, anche sapendo che la quinta estratta è in B , non vi è alcun motivo per rimuovere l'ipotesi di equiprobabilità degli elementi di B . Dunque, la procedura “naturale” consiste nel rimpiazzare lo spazio campionario Ω con B , e calcolare le probabilità dei sottoinsiemi di B secondo la probabilità uniforme su B . Poiché A non è un sottoinsieme di B , si tratterà di calcolare la probabilità di $A \cap B$ secondo la probabilità uniforme su B . Concludiamo allora che l'oggetto più ragionevole per esprimere la probabilità di A *condizionata* all'occorrenza di B è

$$\frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Come esercizio, calcoliamo tale probabilità. Gli elementi di $A \cap B$ sono costituiti dalle cinque contenenti 1, 3, un altro numero dispari diversi da 1 e 3, e due numeri pari. Dunque

$$|A \cap B| = 43 \binom{45}{2}.$$

Inoltre, poiché gli elementi di B contengono 3 numeri dispari e 2 pari,

$$|B| = \binom{45}{3} \binom{45}{2}.$$

Infine

$$\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{43}{\binom{45}{3}} = \frac{6}{1980} \simeq 0.003,$$

che è maggiore della probabilità in assenza di informazioni.

L'esempio appena trattato assieme all'osservazione che, se P è la probabilità uniforme

$$\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

motiva la definizione che segue.

Definizione 1.4.1 Siano $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio probabilizzato e A e B due eventi per cui $P(B) > 0$. La **probabilità di A condizionata a B** si denota con $P(A|B)$ (o anche con $P_B(A)$) ed è definita da

$$P(A|B) = P_B(A) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Alcune proprietà formali della probabilità condizionata sono sintetizzate nella seguente Proposizione.

Proposizione 1.4.2 Sia B un evento fissato, con $P(B) > 0$, e consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longrightarrow P(A|B). \end{aligned}$$

Tale funzione è una probabilità su Ω .

La dimostrazione, che consiste nella verifica della validità degli assiomi P1 e P2, è lasciata per esercizio.

In molte situazioni, la nozione di probabilità condizionata è utile nella costruzione stessa di un modello probabilistico: talvolta è “naturale” assegnare il valore di alcune probabilità condizionate, e da esse dedurre il valore di probabilità non condizionate.

Esempio 1.4.2 Due urne contengono, rispettivamente, 3 palline rosse e 1 verde e 1 pallina rossa e 1 verde. Si sceglie, con ugual probabilità, una delle due urne e poi, dall'urna scelta, si estrae una pallina. Qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa?

Denotiamo con a e b le due urne. Come spazio campionario, si può scegliere l'insieme costituito dalle coppie $(a, r), (a, v), (b, r), (b, v)$, dove la prima componente indica l'urna scelta e la seconda il colore della pallina estratta. L'evento $A = \{(a, r), (a, v)\}$ corrisponde a “l'urna scelta è la a ”, l'evento $R = \{(a, r), (b, r)\}$ corrisponde a “la pallina estratta è rossa”. Dev'essere senz'altro $P(A) = 1/2$, visto che le urne vengono scelte con uguale probabilità. Inoltre, *supponendo* di aver scelto l'urna a , la probabilità di estrarre una pallina rossa è $3/4$. Perciò porremo $P(R|A) = 3/4$. Analogamente $P(R|A^c) = 1/2$. Il procedimento per dedurre $P(R)$ dai dati a disposizione è indicato dal risultato che segue.

Proposizione 1.4.3 (formula della probabilità totale) Sia $(B_n)_{n=1}^N$ una sequenza di eventi finita ($N < +\infty$) o infinita ($N = +\infty$) tali che

a. Per ogni n

$$P(B_n) > 0.$$

b. Gli eventi sono a due a due disgiunti, cioè

$$B_n \cap B_m = \emptyset$$

se $n \neq m$.

c.

$$\bigcup_{n=1}^N B_n = \Omega.$$

Allora, per ogni evento A ,

$$P(A) = \sum_{n=1}^N P(A|B_n)P(B_n).$$

Dimostrazione. Si osservi che

$$A = \bigcup_{n=1}^N (A \cap B_n),$$

e gli eventi di quest'ultima unione sono disgiunti. Usando l'additività di P e la definizione di probabilità condizionata, si ha

$$P(A) = \sum_{n=1}^N P(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^N P(A|B_n)P(B_n).$$

■

Supponiamo ora che A e B siano due eventi tali che $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, sicché entrambe le probabilità condizionate $P(A|B)$ e $P(B|A)$ sono definite. È pressoché immediato verificare la seguente relazione.

Teorema 1 (formula di Bayes) Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, allora

$$(1.4.1) \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Dimostrazione. La formula di Bayes (1.4.1) è equivalente a

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B),$$

che è vera in quanto entrambi i membri sono uguali a $P(A \cap B)$.

■

Nell'ipotesi che $0 < P(B) < 1$, usando la formula delle probabilità totali, la formula di Bayes può essere riscritta nella forma

$$(1.4.2) \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}.$$

Analogamente, se $(B_n)_{n=1}^N$ è una sequenza di eventi soddisfacenti alle ipotesi della Proposizione 1.4.3, si ha

$$(1.4.3) \quad P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{P(A)} = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{\sum_{k=1}^N P(A|B_k)P(B_k)}.$$

Le versioni (1.4.2) e (1.4.3) della formula di Bayes sono quelle che più spesso capita di usare negli esercizi.

La formula di Bayes, a dispetto della sua semplicità, è una delle formule fondamentali della Probabilità, ed è all'origine di un'intera area della Statistica, la **Statistica Bayesiana**. La rilevanza della formula di Bayes nelle applicazioni si può già apprezzare in applicazioni semplici, come quella che segue.

Esempio 1.4.3 Per determinare la presenza di un certo virus viene elaborato un test clinico avente la seguente efficacia: se il virus è presente allora il test risulta positivo nel 99% dei casi; se il virus è assente il test risulta positivo nel 2% dei casi. È noto che 2 persone su 10.000 hanno il virus. Supponiamo che un individuo scelto a caso risulti positivo al test. Con quale sicurezza possiamo affermare che sia malato?

Come accade sovente negli esercizi in cui si applica la formula di Bayes (e non solo), non è rilevante descrivere nel dettaglio lo spazio campionario. Si considerino gli eventi, così descritti in modo informale: A = "l'individuo è malato"; B = "il test è risultato positivo". I dati del problema sono:

$$(1.4.4) \quad \begin{aligned} P(A) &= 0.0002 \\ P(B|A) &= 0.99 \\ P(B|A^c) &= 0.02. \end{aligned}$$

Calcoliamo $P(A|B)$. Utilizzando la formula di Bayes e la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(A|B) = P(B|A) \frac{P(A)}{P(B)} = P(B|A) \frac{P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} \simeq 0.01$$

che è estremamente bassa. Quindi, anche se un individuo risulta positivo al test, è molto improbabile che sia malato. Questo test dunque darà una grande percentuale di falsi positivi.

E se avessimo voluto specificare per bene lo spazio campionario? Si sarebbe potuto procedere ad esempio così. Definiamo

$$\Omega = \{(m, p), (m, n), (s, p), (s, n)\} = \{m, s\} \times \{p, n\}$$

dove m e s indicano la presenza (m) o l'assenza del virus, p e n il risultato del test: p = positivo, n = negativo. Qual è la probabilità P su Ω ? Per individuare P dobbiamo usare i dati del problema. Si noti che gli eventi A e B definiti sopra corrispondono ai seguenti sottoinsiemi di Ω :

$$\begin{aligned} A &= \{(m, p), (m, n)\} \\ B &= \{(m, p), (s, p)\}. \end{aligned}$$

Usando i dati in (1.4.4), è effettivamente possibile calcolare la probabilità di tutti i sottoinsiemi di Ω (provarci!), da cui si può dedurre il valore di $P(A|B)$. Tuttavia, per rispondere al quesito posto, questi dettagli sono poco rilevanti. Inoltre, se dovessimo introdurre un terzo evento (ad esempio un altro test), dovremmo ridefinire Ω e di conseguenza P : ecco perchè spesso non si descrive esplicitamente lo spazio probabilizzato che si sta utilizzando.

Esempio 1.4.4 (Monty Hall) Negli anni '60 negli Stati Uniti un celebre gioco televisivo funzionava così. Il presentatore, Monty Hall, chiedeva di scegliere tra tre porte, dietro una delle quali c'era un grosso premio, mentre le altre due non avevano niente. Dopodichè Monty Hall apriva una delle altre due porte in modo che il premio rimanesse in gioco, e chiedeva se si voleva tenere la porta o cambiare con l'altra. Ci si chiede quale strategia (tenersi la porta o cambiarla) sia più conveniente.

All'inizio del gioco la probabilità che il premio sia dietro una delle porte (diciamo la A) era ovviamente di $1/3$. Se infatti definiamo gli eventi

$$P_i := \{ \text{il premio è dietro la porta } i \}, \quad i = A, B, C.$$

è sensato pensare che i tre eventi, aventi intersezione nulla e unione uguale all'evento certo, all'inizio abbiano uguale probabilità $P(P_i) = 1/3$, quindi $P(P_A) = 1/3$. Quando Monty Hall apre un'altra porta che non contiene il premio, qual è la probabilità che il premio sia ancora sotto A? Poichè il premio è uno solo, sicuramente una delle due porte B o C non conterrà il premio, e sapere quale delle due non lo contiene non ci fornisce informazioni in più rispetto alla porta A, quindi la probabilità non cambia, abbiamo ancora $P(P_A) = 1/3$.

Per rendersene conto più formalmente, procediamo come segue. Definiamo l'evento

$$M := \{ \text{il premio è dietro la porta aperta da Monty Hall} \}$$

Notiamo che, per come è fatto il gioco, abbiamo $P(M^c) = 1$: difatti Monty Hall *sa* dov'è il premio e apre sempre una porta senza. Dopo che Monty Hall ha aperto la porta, possiamo calcolare

$$P(P_A|M^c) = \frac{P(P_A \cap M^c)}{P(M^c)} = P(P_A \cap M^c) = P(P_A) = \frac{1}{3}$$

Monty Hall, ora, ti dà l'opzione di cambiare la scelta e aprire l'altra porta. Per vedere se questo conviene, calcoliamo le probabilità di indovinare la porta sotto le due diverse opzioni: nel caso che cambiamo porta abbiamo $P(P_B \cup P_C) = 1 - 1/3 = 2/3$ (notiamo che l'evento $P_B \cup P_C$ significa ormai che il premio può stare solo sotto la porta rimasta), mentre come abbiamo visto la porta A ha sempre probabilità $1/3$ di contenere il premio: conviene quindi cambiare porta.

Esempio 1.4.5 Giochiamo ora la seguente versione modificata del gioco di Monty Hall. Ci sono due concorrenti: all'inizio uno dei due sceglie una porta, e subito dopo l'altro concorrente sceglie una delle due porte rimaste, potendo quindi anche trovare il premio. Se non lo trova, Monty Hall ti propone ancora di cambiare porta. Qual è la probabilità che il secondo concorrente vinca? Qual è la probabilità che il premio sia sotto la porta rimasta? Questa volta conviene esercitare l'opzione di cambiare porta offerta da Monty Hall?

Per rispondere, supponiamo che il primo concorrente scelga ancora la porta A, e che il secondo concorrente scelga la porta B: difatti, per simmetria, questo non cambia le probabilità. Intuitivamente, abbiamo che $P(P_B) = 1/3$ e $P(P_C) = 1/3$, ma può venire il dubbio che la scelta iniziale del primo concorrente possa aver influenzato queste probabilità. Possiamo allora calcolare:

$$P(P_B) = P(P_B|P_A)P(P_A) + P(P_B|P_A^c)P(P_A^c) = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

e analogamente

$$P(P_C) = P(P_C|P_A)P(P_A) + P(P_C|P_B)P(P_B) + P(P_C|P_C)P(P_C) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

quindi gli eventi vince il secondo concorrente e il premio è sotto la porta rimasta hanno entrambi probabilità $1/3$. Infine, in questo caso la porta scelta dal primo concorrente e la porta rimasta continuano ad avere la stessa probabilità di contenere il premio. Questa probabilità è uguale a $1/3$ prima di sapere se il secondo concorrente ha vinto; $1/2$ se si sa che il secondo concorrente non ha vinto, difatti

$$\begin{aligned} P(P_A|P_B^c) &= \frac{P(P_A \cap P_B^c)}{P(P_B^c)} = \frac{P(P_A)}{P(P_A \cup P_C)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}, \\ P(P_C|P_B^c) &= \frac{P(P_C \cap P_B^c)}{P(P_B^c)} = \frac{P(P_C)}{P(P_A \cup P_C)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e chiaramente 0 se il secondo concorrente ha vinto.

1.5 Indipendenza

Si è visto come la probabilità condizionata $P(A|B)$ rappresenti la probabilità dell'evento A sotto la condizione del verificarsi dell'evento B . È possibile che tale condizione non modifichi la probabilità di A , ossia

$$(1.5.1) \quad P(A|B) = P(A).$$

Usando la definizione di probabilità condizionata, si vede che l'identità (1.5.1) equivale a

$$(1.5.2) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

L'identità in (1.5.2), rispetto a quella in (1.5.1) ha il vantaggio di essere esplicitamente simmetrica in A e B , e di essere definita (e banalmente vera) anche quando $P(B) = 0$. Essa viene dunque scelta per caratterizzare la nozione di *indipendenza*.

Definizione 1.5.1 In uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, due eventi A e B si dicono **indipendenti** se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Esempio 1.5.1 Da due mazzi di carte da Poker si estraggono due carte, una per mazzo. Lo spazio campionario naturale è l'insieme delle coppie (i, j) nel prodotto cartesiano $\Omega = X \times X$, dove X è l'insieme delle carte di un mazzo. Possiamo assumere che la scelta sia “casuale”, cioè descritta dalla probabilità P uniforme su Ω . Consideriamo due eventi A e B , di cui l'evento A dipende solo dall'estrazione dal primo mazzo, l'evento B solo dall'estrazione dal secondo mazzo. In altre parole, se $F, G \subseteq X$, A e B sono della forma:

$$\begin{aligned} A &= \{(i, j) \in \Omega : i \in F\} \\ B &= \{(i, j) \in \Omega : j \in G\}. \end{aligned}$$

Si noti che $|\Omega| = 52^2$, $|A| = 52 \cdot |F|$, $|B| = 52 \cdot |G|$, $|A \cap B| = |F| \cdot |G|$. Ne segue facilmente che

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{|F| \cdot |G|}{52^2} = \frac{|A|}{|\Omega|} \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A)P(B).$$

Dunque A e B sono indipendenti. Notare che gli eventi A e B si riferiscono a due *ripetizioni* dello stesso esperimento aleatorio. L'indipendenza esprime il fatto che l'esito di un esperimento non “influenza” l'esito dell'altro esperimento. Questo contesto di *prove indipendenti ripetute*, rilevante in molti aspetti della Probabilità e della Statistica, è quello in cui la nozione di indipendenza appare in modo naturale.

L'esempio 1.5.1 si può facilmente generalizzare al caso di 3 o più mazzi di carte. In questo caso, P è la probabilità uniforme su $\Omega = X^n$, e possiamo considerare $F_1, F_2, \dots, F_n \subseteq X$ e, per $i = 1, 2, \dots, n$, $A_i = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in X^n : \omega_i \in F_i\}$. Una semplice generalizzazione dell'argomento visto sopra mostra che

$$(1.5.3) \quad P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i).$$

Naturalmente se avessimo considerato solo alcuni degli A_i , per esempio la coppia A_i, A_j con $i \neq j$, lo stesso facile calcolo sulle cardinalità avrebbe mostrato che

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

Tutto ciò suggerisce che, nell'estendere la nozione di indipendenza a tre o più eventi, dobbiamo richiedere la proprietà “moltiplicativa” (1.5.3), ma anche il fatto che se una famiglia di eventi è costituita da eventi indipendenti, anche ogni sua sottofamiglia è costituita da eventi indipendenti. Queste due richieste non sono implicate l'una dall'altra, come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 1.5.2 Sia $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, P = probabilità uniforme, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$. Si vede immediatamente che le coppie (A, B) , (B, C) e (A, C) sono formate da eventi indipendenti. Tuttavia:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)P(B)P(C) = 1/8.$$

Esempio 1.5.3 Sia $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$, con la probabilità uniforme. Siano

$$\begin{aligned} A &= \{(i, j) : j = 1, 2 \text{ o } 3\} \\ B &= \{(i, j) : j = 3, 4 \text{ o } 5\} \\ C &= \{(i, j) : i + j = 9\}. \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= \frac{1}{36} \neq \frac{1}{18} = P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= \frac{1}{12} \neq \frac{1}{18} = P(B)P(C) \end{aligned}$$

ma

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)P(C).$$

Definizione 1.5.2 Sia I un qualunque insieme di indici, e sia $\{A_i : i \in I\}$ una famiglia di eventi in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Diremo che tali eventi sono **indipendenti** se per ogni sottoinsieme finito J di I , si ha

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

La Proposizione che segue afferma che se in una famiglia di eventi indipendenti si rimpiazzano alcuni eventi con i loro complementari, si ottiene ancora una famiglia di eventi indipendenti.

Proposizione 1.5.3 Sia $\{A_i : i \in I\}$ una famiglia di eventi indipendenti, $I' \subseteq I$, e definiamo

$$B_i = \begin{cases} A_i^c & \text{se } i \in I' \\ A_i & \text{se } i \in I \setminus I'. \end{cases}$$

Allora $\{B_i : i \in I\}$ è una famiglia di eventi indipendenti.

Dimostrazione. Sia $J \subset I$ finito, e sia $J' = J \cap I'$. Dobbiamo mostrare che

$$(1.5.4) \quad P\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \prod_{j \in J} P(B_j).$$

Possiamo supporre che

$$J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}, \quad J' = \{j_1, \dots, j_k\},$$

dove $k \leq m$. Se $k = 0$, la (1.5.4) segue immediatamente dall'indipendenza di $\{A_i : i \in I\}$. Supponiamo $k = 1$. Usando l'indipendenza di $\{A_i : i \in I\}$, si ha

$$\begin{aligned} P(B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap \dots \cap B_{j_m}) &= P(A_{j_1}^c \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_m}) \\ &= P([A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_m}] \setminus [A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_m}]) \\ &= P(A_{j_2}) \dots P(A_{j_m}) - P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \dots P(A_{j_m}) \\ &= [1 - P(A_{j_1})]P(A_{j_2}) \dots P(A_{j_m}) \\ &= P(A_{j_1}^c)P(A_{j_2}) \dots P(A_{j_m}) \\ &= P(B_{j_1})P(B_{j_2}) \dots P(B_{j_m}). \end{aligned}$$

A questo punto si procede per induzione su k , per trattare tutti i casi $0 \leq k \leq m$. Si lasciano i semplici dettagli al lettore. ■

Nel prossimo esempio vedremo un calcolo classico basato sull'indipendenza.

Esempio 1.5.4 Si eseguono N prove ripetute di un gioco in cui la probabilità di vincere è $p \in [0, 1]$. Si assuma che i risultati di prove distinte siano indipendenti.

- Qual è la probabilità di vincere $n \leq N$ volte sugli N tentativi?
- Qual è la probabilità di vincere per la prima volta all' n -esimo tentativo?

Come spazio campionario possiamo scegliere

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) : x_i \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^N,$$

dove $x_i = 1$ significa che l' i -esima prova del gioco è stata vinta. Fissato un elemento $y \in \Omega$, sia

$$A_i(y_i) = \{x \in \Omega : x_i = y_i\}.$$

L'indipendenza delle prove effettuate si traduce nel fatto che gli eventi $A_1(y_1), A_2(y_2), \dots, A_N(y_N)$ sono indipendenti. Inoltre è chiaro che

$$\{y\} = \bigcap_{i=1}^N A_i(y_i).$$

Per l'indipendenza, allora,

$$P(\{y\}) = \prod_{i=1}^N P(A_i(y_i)).$$

Inoltre, poichè per ogni tentativo la probabilità di vincere è p ,

$$P(A_i(y_i)) = \begin{cases} p & \text{se } y_i = 1 \\ 1 - p & \text{se } y_i = 0 \end{cases}$$

o, equivalentemente, $P(A_i(y_i)) = p^{y_i}(1-p)^{1-y_i}$. Ne segue allora che

$$P(\{y\}) = \prod_{i=1}^N p^{y_i}(1-p)^{1-y_i} = p^{\sum_{i=1}^N y_i} (1-p)^{N - \sum_{i=1}^N y_i}.$$

Gli eventi di cui vogliamo calcolare la probabilità sono

$$A = \{y \in \Omega : \sum_{i=1}^N y_i = n\}$$

e

$$B = A_1(0) \cap \cdots \cap A_{n-1}(0) \cap A_n(1).$$

Da quanto visto sopra,

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{y \in A} P(\{y\}) \\ &= \sum_{y \in A} p^n (1-p)^{N-n} \\ &= |A| p^n (1-p)^{N-n} \\ &= \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}, \end{aligned}$$

ove abbiamo usato il fatto che scegliere un elemento di A equivale a scegliere gli n tentativi vincenti sugli N a disposizione.

Più facile è calcolare la probabilità di B :

$$P(B) = P(A_1(0)) \cdots P(A_{n-1}(0)) P(A_n(1)) = (1-p)^{n-1} p.$$

Esercizi

Esercizio 17 Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 sapendo che la somma dei punteggi ottenuti è 9?

Esercizio 18 Siano A, B due eventi. Sapendo che $P(A|B) = 0.7$, $P(A|B^c) = 0.3$ e $P(B|A) = 0.6$, calcolare $P(A)$.

Esercizio 19 Mostrare, con degli esempi, che entrambe le disuguaglianze $P(A|B) > P(A)$ e $P(A|B) < P(A)$ sono possibili.

Esercizio 20 Sia S_{4n} l'insieme delle permutazioni di $\{1, 2, \dots, 4n\}$, con $n \geq 1$, e sia P la probabilità uniforme su S_{4n} . Si considerino gli eventi:

$$A = \{\sigma \in S_{4n} : \text{per ogni } k \text{ pari, } \sigma(k) \text{ è pari}\}$$

$$B = \{\sigma \in S_{4n} : \text{per ogni } k \leq 2n, \sigma(k) \leq 2n\}.$$

Calcolare $P(A)$, $P(B)$ e $P(A|B)$.

Esercizio 21 Il 2 per mille delle banconote da 50 Euro in circolazione sono false. Una macchina riconosce come false il 98% delle banconote false e, per errore, l'1% di quelle autentiche.

- Qual è la probabilità che una banconota presa a caso venga rilevata come falsa?
- Qual è la probabilità che una banconota rilevata come falsa sia, in realtà, autentica?

Esercizio 22 Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventi indipendenti tali che $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1$. Mostrare che esiste $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tale che $P(A_k) = 1$.

Esercizio 23 Un'urna contiene M palline, di cui M_1 bianche.

- a. Si effettuano n estrazioni successive, *con* reintroduzione. Si considerino gli eventi

$B_j = \text{"la } j\text{-esima pallina estratta è bianca"}$

$A_m = \text{"delle } n \text{ palline estratte esattamente } m \text{ sono bianche"}$

dove $m \leq n$. Calcolare $P(B_j|A_m)$.

- b. Calcolare la probabilità condizionata del punto a. nel caso di estrazioni *senza* reintroduzione, supponendo che m sia tale che $P(A_m) > 0$.

Esercizio 24 Siano A, B, C tre eventi in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si assuma che A, B, C siano indipendenti. Mostrare che

- a. $A \cap B$ è indipendente da C .
b. $A \cup B$ è indipendente da C .

Esercizio 25 A tre studenti viene posta la stessa domanda. Supponiamo di sapere che il primo risponderà esattamente con probabilità $2/3$, il secondo con probabilità $1/2$, il terzo con probabilità $1/3$. Gli studenti non possono comunicare tra loro.

- a. Se solo uno degli studenti dà la risposta esatta, qual è la probabilità che sia stato il primo?
b. Se due studenti hanno dato la risposta esatta, qual è la probabilità che il terzo abbia dato la risposta esatta?

Esercizio 26 * Un'urna contiene n palline, che possono essere di due colori, rosso e verde. Non abbiamo idea di quante siano le palline rosse, sicchè riteniamo che tutti i possibili valori $k = 1, 2, \dots, n$ del numero di palline rosse siano equiprobabili.

- a. Si estrae una pallina dall'urna, che si rivela essere rossa. Sapendo ciò, per quale valore di k la probabilità che nell'urna vi fossero k palline rosse è massimizzata?
b. Si risponda alla medesima domanda posta in a., ma assumendo che dall'urna siano state estratte due palline, una rossa e una verde.

Esercizio 27 * Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità uniforme, in cui Ω contiene un numero primo di elementi. Descrivere tutte le coppie di eventi indipendenti.

Esercizio 28 Quante volte è necessario lanciare un dado affinché la probabilità di ottenere almeno un 6 sia maggiore o uguale a 0.5?

Esercizio 29 Con 10 proiettili devo colpire 5 bersagli. Ad ogni tiro colpisco un bersaglio con probabilità $1/2$, indipendentemente dall'esito degli altri tiri.

- a. Qual è la probabilità che riesca effettivamente a colpire tutti e cinque i bersagli?
b. Qual è la probabilità che mi avanzino dei proiettili?

Esercizio 30 Un commerciante acquista certe componenti elettriche in egual misura da due fornitori A e B. Viene a sapere che il 15% delle componenti provenienti da B è difettosa, cioè si rompono dopo poche ore di utilizzo, contro solo il 3% di quelle provenienti da A. Il commerciante è in procinto di mettere in vendita una confezione tali componenti, tutte provenienti dallo stesso fornitore, ma di cui non ha registrato la provenienza. Per conoscerne la provenienza ne testa 20, di cui 2 risultano difettose. Con quale grado di confidenza può ritenere che la partita gli sia stata fornita da B?

Esercizio 31 Un'azienda produce occhiali utilizzando tre diversi macchinari. Il primo macchinario produce mediamente un paio di occhiali difettosi ogni 100, il secondo ogni 200, il terzo ogni 300. Gli occhiali vengono imballati in scatole identiche, contenenti 100 paia. Ogni scatola contiene occhiali scelti a caso tra quelli prodotti da una sola delle tre macchine. Si supponga che il primo macchinario abbia una produzione doppia rispetto agli altri due, cioè una scatola scelta a caso ha probabilità $1/2$ di essere prodotta dal primo macchinario, $1/4$ da secondo e $1/4$ dal terzo. Un ottico riceve una di queste scatole. Qual è la probabilità che trovi almeno un paio di occhiali difettoso?

Esercizio 32 Mostrare che se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono eventi indipendenti, allora

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n P(A_i^c).$$

Esercizio 33 Da un'urna contenente n palline di cui k rosse e $n - k$ verdi, con $1 \leq k \leq n - 1$, si estrae una pallina e quindi, senza reimmetterla nell'urna, si estrae una seconda pallina. Si considerino gli eventi informalmente descritti da

A_1 = la prima pallina estratta è rossa

A_2 = la seconda pallina estratta è rossa.

Mostrare che A_1 e A_2 non sono indipendenti

Esercizio 34 Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventi indipendenti tali che $\sum_{i=1}^n P(A_i) \leq 1$. Mostrare che

$$P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) \leq n^{-n}.$$

(Sugg: usare il fatto che se $a_1, \dots, a_n \geq 0$ allora $(a_1 + \dots + a_n)/n \geq (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{1/n}$.)

Esercizio 35 Il signor A riceve un'informazione che si esprime con un "sì" o con un "no", trasmette tale informazione al signor B, che la trasmette al signor C, che la trasmette al signor D, il quale la annuncia. Ognuno dei quattro signori, indipendentemente dagli altri, mente con probabilità $1/3$. Se si sa che D ha annunciato l'informazione corretta, cioè quella che A ha ricevuto, qual è la probabilità che A abbia mentito?

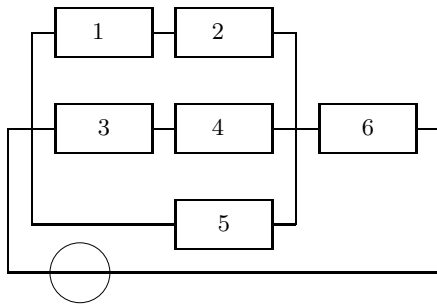
Esercizio 36 Si voglia illuminare una stanza con un dato numero di lampadine. La probabilità che una lampadina sopravviva almeno n giorni è p^n , ove $p = 0.9$. Si può ritenere che le lampadine si comportino in modo indipendente. Quante lampadine devo installare affinché, con probabilità almeno 0.99, dopo 10 giorni vi sia almeno una lampadina funzionante?

Esercizio 37 Il signor Bianchi da Roma e il signor Rossi da Milano decidono di incontrarsi a Roma. All'ultimo momento, Rossi, che è un tipo molto indeciso, rimette al caso la decisione di partire, lanciando una moneta. Successivamente, in caso di esito positivo, per scegliere quale dei 6 treni a sua disposizione prendere, tira un dado. Ora, se Bianchi va in stazione e osserva che Rossi non è su nessuno dei primi 5 treni, qual è la probabilità che Rossi arrivi con l'ultimo treno?

Esercizio 38 In un labirinto a T , ad un animale da laboratorio si dà la possibilità di andare a sinistra e ricevere cibo o di andare a destra e ricevere una leggera scossa elettrica. Assumete che prima di ogni condizionamento (nel tentativo 1) sia ugualmente probabile che gli animali vadano a destra o a sinistra. Dopo aver ricevuto il cibo ad un certo tentativo, le probabilità di andare a sinistra e a destra diventano 0.6 e 0.4, rispettivamente, per il tentativo successivo. Invece, dopo aver ricevuto una scossa elettrica ad un certo tentativo, le probabilità di andare a sinistra e a destra al tentativo successivo diventano rispettivamente 0.8 e 0.2, rispettivamente.

1. Qual è la probabilità che l'animale vada a sinistra al tentativo numero 2?
2. E al numero 3?
3. Se dopo il secondo tentativo si osserva che l'animale è a sinistra, qual è la probabilità che l'animale abbia ricevuto cibo prima dell'ultimo movimento?

Esercizio 39 Si determini la probabilità che il circuito in figura sia “chiuso” supponendo che ciascun interruttore del circuito sia chiuso in modo indipendente e che la probabilità che l' i -esimo interruttore sia chiuso sia p_i , $i = 1, \dots, 6$.



Esercizio 40 Un sistema ingegneristico di n componenti è detto sistema “ k -su- n ” se il sistema funziona se e solo se almeno k componenti su n funzionano. Supponiamo che tutte le componenti funzionino indipendentemente una dall'altra. Se l' i -esima componente funziona con probabilità p_i , qual è la probabilità che un sistema 2-su-4 funzioni?

Esercizio 41 Siano date 2 urne U_1 , U_2 tali che U_1 contiene 1 pallina bianca e 4 palline nere, U_2 contiene 5 palline bianche e 5 nere. Un giocatore estrarre a caso 2 palline, seguendo una certa strategia, e vince 100 Euro se le due palline sono dello stesso colore.

1. Quale delle seguenti tre strategie è preferibile per il giocatore:
 - (a) Il giocatore sceglie a caso l'urna lanciando una moneta, estrae una pallina dall'urna, la rimette nell'urna, rilancia la moneta per scegliere nuovamente l'urna, quindi estrae la seconda pallina.
 - (b) Il giocatore sceglie a caso un'urna, estrae una pallina, la rimette nell'urna, quindi effettua l'estrazione della seconda pallina dalla stessa urna.
 - (c) Il giocatore sceglie a caso un'urna, estrae una pallina, quindi effettua l'estrazione della seconda pallina dall'altra urna.
2. Qual è la probabilità di vincere se le due estrazioni con reimmissione avvengono da un'unica urna contenente il totale delle palline bianche e nere delle due urne?