Soluzioni

Esercizio 1.

1. Verifichiamo che $\mathcal{A}$ è una σ-algebra. Siccome $\emptyset$ è un insieme finito, $\emptyset \in \mathcal{A}$, e Ω è tale che $\emptyset = \Omega \setminus \Omega$ è finito, quindi anche $\Omega \in \mathcal{A}$.

   Inoltre $\mathcal{A}$ è chiusa per complemento. Difatti, se $A \in \mathcal{A}$ ed è al più numerabile, allora A^c è tale che $\Omega \setminus A^c = A$ è al più numerabile e quindi $A^c \in \mathcal{A}$. Se invece $A \in \mathcal{A}$ è il complementare di un insieme al più numerabile, allora A^c è al più numerabile e quindi $A^c \in \mathcal{A}$.

   Infine mostriamo che $\mathcal{A}$ è chiusa per unione numerabile. Se $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ e sono tutti al più numerabili, allora $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ è un insieme al più numerabile, e quindi $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Se invece almeno uno degli $(A_n)_n$ è il complementare di un insieme al più numerabile (poniamo che sia A_1), allora l'insieme $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq A_1^c$, e quindi $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c$ è al più numerabile, e quindi $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

2. Anche qui abbiamo che, siccome $\emptyset$ è un insieme finito, $\emptyset \in \mathcal{A}'$, e Ω è tale che $\emptyset = \Omega \setminus \Omega$ è finito, quindi anche $\Omega \in \mathcal{A}'$.

   Inoltre $\mathcal{A}'$ è chiusa per complemento. Difatti, se $A \in \mathcal{A}'$ ed è finito, allora A^c è tale che $\Omega \setminus A^c = A$ è finito e quindi $A^c \in \mathcal{A}'$. Se invece $A \in \mathcal{A}'$ è il complementare di un insieme finito, allora A^c è finito e quindi $A^c \in \mathcal{A}'$.

   Mostriamo infine che $\mathcal{A}'$ non è chiusa per unione numerabile. Se infatti B è un insieme numerabile, allora $B \notin \mathcal{A}'$. Ma si può scrivere $B = \cup_{x \in B}\{x\}$, questa unione è numerabile e $\{x\} \in \mathcal{A}'$ per ogni $x \in B$, poichè sono tutti insiemi finiti. Se $\mathcal{A}'$ fosse una σ-algebra, si avrebbe che $B = \cup_{x \in B}\{x\} \in \mathcal{A}'$, cosa che abbiamo visto non essere vera. Quindi $\mathcal{A}'$ non puó essere una σ-algebra.

Esercizio 2. Se $\mathbb{P}(A_n) = 1$ per ogni $n \geq 1$, allora abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \geq \\
&\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \mathbb{P}(A_n)) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(1-1) = 1 - 0 = 1
\end{aligned}$$

Siccome $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ è un evento, non può avere probabilità maggiore di 1, e quindi $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

Esercizio 3. Possiamo prendere $\Omega := C_2^n (= \{C \subseteq \{1, \dots, n\} \ : \ |C| = 2\})$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}$ legge uniforme su Ω. Fissato $k \in \{2, \dots, n-1\}$, dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento

$$A_k := \{\{l, m\} \mid l < k, m > k\}$$

Questo insieme è in corrispondenza biunivoca con il prodotto cartesiano di due insiemi, uno di cardinalità $k-1$, l'altro di cardinalità $n-k$, quindi $|A_k| = (k-1)(n-k)$, e

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{2}}$$

Esercizio 4. Possiamo prendere $\Omega = \{1, \dots, 6\}^n$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}$ legge uniforme su Ω. La prima domanda ci chiede di calcolare la probabilità di

$$A := \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 6n - 1 \right\}$$

Siccome questo è possibile se e solo se esiste un unico $\omega_i = 5$, $i = 1, \dots, n$ e $\omega_j = 6$ per ogni $j \neq i$, abbiamo

$$A := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \exists! \omega_i = 5, \omega_j = 6 \ \forall j \neq i\}$$

e quindi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n}{6^n}$$

La seconda domanda ci chiede di calcolare la probabilità di

$$B := \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 6n - 2 \right\}$$

Ci sono due casi possibili, quindi possiamo scrivere $B = B_1 \cup B_2$, con

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \exists i \neq j \text{ tali che } \omega_i = \omega_j = 5, \omega_k = 6 \ \forall k \neq i, j\} \\ B_2 &:= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \exists! \omega_i = 4, \omega_j = 6 \ \forall j \neq i\} \end{aligned}$$

e l'unione è disgiunta. Allora

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) = \frac{|B_1|}{|\Omega|} + \frac{|B_2|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{2}}{6^n} + \frac{n}{6^n} = \frac{n^2 - n}{2 \cdot 6^n}$$

Esercizio 5. Fissato n, possiamo prendere $\Omega_n = \{1, \dots, 365\}^n$, $\mathcal{A}_n := \mathcal{P}(\Omega_n)$ e $\mathbb{P}_n$ legge uniforme su Ω_n. Dobbiamo calcolare la probabilità di A_n tale che

$$A_n := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \exists i, j \text{ tali che } \omega_i = \omega_j\}$$

In realtà è più facile calcolare la probabilità del complementare

$$A_n^c := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \neq \omega_j \forall i \neq j\}$$

Difatti A_n^c ha cardinalità $\frac{365!}{(365-n)!} = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$. Allora

$$\mathbb{P}_n(A_n) = 1 - \mathbb{P}_n(A_n^c) = 1 - \frac{|A_n^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365!}{365^n (365 - n)!} = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365 - n + 1}{365}$$

Notiamo che questa è una funzione crescente in n; facendo i conti si ha poi che per $n = 22$, $\mathbb{P}_{22}(A_{22}) = 0.475 < 1/2$, e per $n = 23$, $\mathbb{P}_{23}(A_{23}) = 0.507 > 1/2$, quindi il minimo n tale che la probabilità di avere due compleanni nello stesso giorno è maggiore di $1/2$ è $n = 23$.

Esercizio 6. Siccome si tratta di disporre 2^n giocatori in 2^n posti di un torneo ad eliminazione diretta, possiamo prendere $\Omega = \{\omega : \{1, \dots, 2^n\} \to \{1, \dots, 2^n\} \mid \omega \text{ iniettiva}\}$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}$ legge uniforme su Ω. L'evento "A e B si incontrano in finale" può essere rappresentato come segue: diamo al giocatore A l'etichetta "1" e a B l'etichetta "2"; allora l'evento "A e B si incontrano in finale" può essere rappresentato da $E := E_1 \cup E_2$, dove

$$E_1 := \{\omega \in \Omega \mid \omega(1) \leq 2^{n-1}, \omega(2) > 2^{n-1}\}, \qquad E_2 := \{\omega \in \Omega \mid \omega(1) > 2^{n-1}, \omega(2) \leq 2^{n-1}\}$$

poichè per incontrarsi in finale devono stare ciascuno in una "metà" diversa del torneo. Allora, notando che l'unione è disgiunta, abbiamo

$$|E| = |E_1| + |E_2| = 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot (2^n - 2)! + 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot (2^n - 2)! = 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot (2^n - 2)!$$

e quindi

$$\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2^n \cdot 2^{n-1} \cdot (2^n - 2)!}{(2^n)!} = \frac{2^n \cdot 2^{n-1}}{2^n \cdot (2^n - 1)} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} = \frac{1}{2 - 2^{1-n}}$$

da cui si può vedere che questa probabilità è vicina ad $1/2$, ed in particolare è sempre maggiore.