

Soluzioni

Esercizio 1. Bisogna verificare che $\mathbb{P}(\cdot|B)$ soddisfa i due assiomi della probabilità:

1. $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$; difatti

$$\mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

2. Se $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ sono disgiunti, allora anche $((A_n \cap B))_n$ sono disgiunti, e si ha:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cup_n A_n|B) &= \frac{\mathbb{P}((\cup_n A_n) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\cup_n (A_n \cap B))}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\sum_n \mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \\ &= \sum_n \frac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_n \mathbb{P}(A_n|B)\end{aligned}$$

Esercizio 2. Usando la definizione di probabilità condizionata, calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B \cap C^c)\mathbb{P}(C^c|B) &= \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)} \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C^c)}{\mathbb{P}(B \cap C^c)} \frac{\mathbb{P}(C^c \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C^c)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B)\end{aligned}$$

Esercizio 3 (paradosso di Simpson).

1. Poichè ci sono $90 + 60 + 10 + 40 = 200$ pazienti, consideriamo uno spazio probabilizzato con 200 elementi e la legge uniforme. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G \mid X \cap B) &= \frac{87}{90}, & \mathbb{P}(X \cap B) &= \frac{90}{200}, \\ \mathbb{P}(G \mid Y \cap B) &= \frac{59}{60}, & \mathbb{P}(Y \cap B) &= \frac{60}{200}, \\ \mathbb{P}(G \mid X \cap C) &= \frac{3}{10}, & \mathbb{P}(X \cap C) &= \frac{10}{200}, \\ \mathbb{P}(G \mid Y \cap C) &= \frac{21}{40}, & \mathbb{P}(Y \cap C) &= \frac{40}{200}.\end{aligned}$$

2. Abbiamo $\mathbb{P}(G \mid X \cap B) = \frac{87}{90} < \mathbb{P}(G \mid Y \cap B) = \frac{59}{60}$, e $\mathbb{P}(G \mid X \cap C) = \frac{3}{10} < \mathbb{P}(G \mid Y \cap C) = \frac{21}{40}$. Sia in buone condizioni che in cattive condizioni, l'ospedale Y sembra migliore.

3. Bisogna ora calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G \mid X) &= \frac{\mathbb{P}(G \cap X)}{\mathbb{P}(X)} = \frac{\mathbb{P}(G \cap X \cap B) + \mathbb{P}(G \cap X \cap C)}{\mathbb{P}(X)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(G \mid X \cap B)\mathbb{P}(X \cap B) + \mathbb{P}(G \mid X \cap C)\mathbb{P}(X \cap C)}{\mathbb{P}(X \cap B) + \mathbb{P}(X \cap C)} = \frac{\frac{87}{90} \cdot \frac{90}{200} + \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{200}}{\frac{90}{200} + \frac{10}{200}} = \frac{9}{10}\end{aligned}$$

e allo stesso modo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G \mid Y) &= \frac{\mathbb{P}(G \cap Y)}{\mathbb{P}(Y)} = \frac{\mathbb{P}(G \cap Y \cap B) + \mathbb{P}(G \cap Y \cap C)}{\mathbb{P}(Y)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(G \mid Y \cap B)\mathbb{P}(Y \cap B) + \mathbb{P}(G \mid Y \cap C)\mathbb{P}(Y \cap C)}{\mathbb{P}(Y \cap B) + \mathbb{P}(Y \cap C)} = \frac{\frac{59}{60} \cdot \frac{60}{200} + \frac{21}{40} \cdot \frac{40}{200}}{\frac{60}{200} + \frac{40}{200}} = \frac{8}{10}\end{aligned}$$

e quindi si ottiene $\mathbb{P}(G \mid X) = \frac{9}{10} > \mathbb{P}(G \mid Y) = \frac{8}{10}$, al contrario del punto 2.

4. Perchè non è detto che se $\mathbb{P}(G \mid X \cap B) < \mathbb{P}(G \mid Y \cap B)$, e $\mathbb{P}(G \mid X \cap C) < \mathbb{P}(G \mid Y \cap C)$, allora $\mathbb{P}(G \mid X) > \mathbb{P}(G \mid Y)$. Una condizione sufficiente per questo può essere $\mathbb{P}(B \mid X) = \mathbb{P}(B \mid Y)$ (la tesi segue subito dalla formula delle probabilità totali per probabilità condizionate), che non era assolutamente verificata in questo caso:

$$\mathbb{P}(B \mid X) = \frac{\mathbb{P}(X \cap B)}{\mathbb{P}(X)} = \frac{\frac{90}{200}}{\frac{90}{200} + \frac{10}{200}} = \frac{9}{10} > \mathbb{P}(B \mid Y) = \frac{\mathbb{P}(Y \cap B)}{\mathbb{P}(Y)} = \frac{\frac{60}{200}}{\frac{60}{200} + \frac{40}{200}} = \frac{6}{10}$$

Esercizio 4.

1. Se $A \subseteq B$, allora $A \cap B = A$, e si ha

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$

se e solo se $\mathbb{P}(A) = 0$ oppure $\mathbb{P}(B) = 1$.

2. Calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c \cap B^c) &= \mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)\end{aligned}$$

3. Abbiamo

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \mathbb{P}((\cap_{i=1}^n A_i^c)^c) = 1 - \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i^c) = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c)$$

4. Poichè la media geometrica è minore o uguale della media aritmetica, abbiamo

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)}{n} \right)^n \leq \left(\frac{1}{n} \right)^n = n^{-n}$$

Esercizio 5. Una possibile costruzione per questo esperimento aleatorio è $\Omega := D_2^n = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i \in \{1, \dots, n\}\}$ con l'interpretazione che se $\omega_i \leq k$ allora la i -esima pallina è rossa; fissiamo poi $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}$ la legge uniforme su Ω . Allora abbiamo che $A_i := \{\omega \in \Omega \mid \omega_i \leq k\}$, e

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{k(n-1)}{n(n-1)} = \frac{k}{n}$$

Inoltre, $A_1 \cap A_2 = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 \leq k, \omega_2 \leq k\}$, quindi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{|A_1 \cap A_2|}{|\Omega|} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

Se A_1 e A_2 fossero indipendenti, avremmo che

$$\frac{k^2}{n^2} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

quindi $k = 0$ oppure $k(n-1) = n(k-1)$, che è vero se e solo se $k = n$, entrambe condizioni che avevamo escluso poichè $1 \leq k \leq n-1$. Da questo si desume che A_1 e A_2 non sono indipendenti.

A questa conclusione si poteva arrivare anche considerando la probabilità di A_2 condizionata ad A_1 : infatti

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\frac{k(k-1)}{n(n-1)}}{\frac{k}{n}} = \frac{k-1}{n-1}$$

che è uguale a $\mathbb{P}(A_2) = k/n$ se e solo se $k = n$, che era stato escluso fin dall'inizio. Poichè se A_1 e A_2 sono indipendenti e non trascurabili si ha che $\mathbb{P}(A_2|A_1) = \mathbb{P}(A_2)$, questo implica che A_1 e A_2 non sono indipendenti.

Esercizio 6. Innanzitutto definiamo gli eventi

$$\begin{aligned}D &:= \{ \text{il feto è Down} \}, \\T &:= \{ \text{la translucenza nucale è positiva} \}, \\B &:= \{ \text{il bitest è positivo} \}\end{aligned}$$

Possiamo riscrivere i dati come

$$\mathbb{P}(T|D) = 0.77, \quad \mathbb{P}(T|D^c) = 0.05, \quad \mathbb{P}(B|D) = 0.6, \quad \mathbb{P}(B|D^c) = 0.05$$

Dato che il test non fornisce informazioni in proposito, supponiamo che queste probabilità non cambino con l'età della donna. Infine, definendo $P := \{ \text{il test combinato è positivo} \}$, abbiamo che $P = T \cup B$.

1. Dobbiamo calcolare

$$\mathbb{P}(P|D) = \mathbb{P}(T \cup B|D) = 1 - \mathbb{P}(T \cap B|D) = 1 - \mathbb{P}(T|D)\mathbb{P}(B|D) = 1 - 0.23 \cdot 0.4 = 0.908$$

che in effetti è vicino allo 0.9 fornito nel testo: abbiamo qui usato il fatto che T e B sono condizionatamente indipendenti rispetto a D .

2. Siccome T e B sono condizionatamente indipendenti anche rispetto a D^c , abbiamo

$$\mathbb{P}(P|D^c) = \mathbb{P}(T \cup B|D^c) = 1 - \mathbb{P}(T \cap B|D^c) = 1 - \mathbb{P}(T|D^c)\mathbb{P}(B|D^c) = 1 - 0.95 \cdot 0.95 = 0.0975$$

che è invece quasi il doppio dello 0.05 fornito nel testo.

3. Utilizzando la formula di Bayes abbiamo

$$\mathbb{P}(D|P) = \frac{\mathbb{P}(P|D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(P|D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(P|D^c)\mathbb{P}(D^c)} = \frac{0.908 \cdot \frac{1}{187}}{0.908 \cdot \frac{1}{187} + 0.0975 \cdot \frac{186}{187}} = 0.0476$$

4. Utilizzando la formula di Bayes e l'informazione sull'indipendenza abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D|T \cap B) &= \frac{\mathbb{P}(T \cap B|D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T \cap B|D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T \cap B|D^c)\mathbb{P}(D^c)} = \\&= \frac{\mathbb{P}(T|D)\mathbb{P}(B|D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T|D)\mathbb{P}(B|D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T|D^c)\mathbb{P}(B|D^c)\mathbb{P}(D^c)} = \\&= \frac{0.77 \cdot 0.6 \cdot \frac{1}{187}}{0.77 \cdot 0.6 \cdot \frac{1}{187} + 0.05 \cdot 0.05 \cdot \frac{186}{187}} = \\&= \frac{0.77 \cdot 0.6}{0.77 \cdot 0.6 + 0.05 \cdot 0.05 \cdot 186} = \frac{0.462}{0.462 + 0.465} = \frac{0.462}{0.927} = 0.4983\end{aligned}$$