

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Per calcolare le densità marginali, basta sommare la densità congiunta: per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$p_X(n) = \sum_m p_{X,Y}(n, m) = \sum_m c \frac{l^n \mu^m \nu^{nm}}{n! m!} = c \frac{l^n}{n!} \sum_m \frac{(\mu \nu^n)^m}{m!} = c \frac{l^n}{n!} e^{\mu \nu^n}$$

e per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$p_Y(m) = \sum_n p_{X,Y}(n, m) = \sum_n c \frac{l^n \mu^m \nu^{nm}}{n! m!} = c \frac{\mu^m}{m!} \sum_n \frac{(l \nu^m)^n}{n!} = c \frac{\mu^m}{m!} e^{l \nu^m}$$

2. Abbiamo che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\{X = n | Y = m\} = p_{X|Y}(n|m) = \frac{p_{X,Y}(n, m)}{p_Y(m)} = \frac{c \frac{l^n \mu^m \nu^{nm}}{n! m!}}{c \frac{\mu^m}{m!} e^{l \nu^m}} = \frac{\frac{l^n \nu^{nm}}{n!}}{e^{l \nu^m}} = e^{-l \nu^m} \frac{(l \nu^m)^n}{n!}$$

e quindi X ha, come legge condizionata a Y , una legge di Poisson di parametro $l \nu^Y$

3. Se $\{X = n\}$, $\{Y = m\}$ sono indipendenti per ogni coppia $n, m \in \mathbb{N}$, allora per $n = 0$, $m = 0$ si ha

$$\mathbb{P}\{X = 0, Y = 0\} = c \frac{l^0 \mu^0 \nu^0}{0! 0!} = c = \mathbb{P}\{X = 0\} \mathbb{P}\{Y = 0\} = c \frac{l^0}{0!} e^{\mu \nu^0} c \frac{\mu^0}{0!} e^{l \nu^0} = c^2 e^{\mu} e^l$$

quindi $c = e^{-(\mu+l)}$. Ponendo quindi $\mathbb{P}\{X = 0, Y = m\} = \mathbb{P}\{X = 0\} \mathbb{P}\{Y = m\}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$p_{X,Y}(0, m) = c \frac{l^0 \mu^m \nu^0}{0! m!} = p_X(0) p_Y(m) = c \frac{l^0}{0!} e^{\mu \nu^0} c \frac{\mu^m}{m!} e^{l \nu^m}$$

e quindi, ricordando che $c = e^{-(\mu+l)}$, si ottiene $l = l \nu^m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, che è possibile se e solo se $\nu = 1$. Viceversa, se $\nu = 1$ e $c = e^{-(\mu+l)}$, abbiamo che

$$p_{X,Y}(n, m) = e^{-(\mu+l)} \frac{l^n \mu^m}{n! m!} = e^{-\mu} \frac{l^n}{n!} e^{-l} \frac{\mu^m}{m!} = p_X(n) p_Y(m)$$

Esercizio 2. Innanzitutto consideriamo le variabili aleatorie $(X_n)_n$ i.i.d. di legge uniforme sull'insieme $\{1, \dots, 6\}$, ognuna delle quali rappresenta un diverso lancio di un dado. Ovviamente, per ogni k , il vettore aleatorio (X_{2k-1}, X_{2k}) , che rappresenta il k -esimo lancio di una coppia di dadi, ha legge uniforme su $\{1, \dots, 6\}^2$.

1. Bisogna calcolare

$$\mathbb{P}\{X_1 + X_2 = 7\} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^6 \{X_1 = i, X_2 = 7 - i\}\right) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

2. Bisogna calcolare

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\exists k < 6 \text{ tale che } X_{2k-1} + X_{2k} = 7\} &= 1 - \mathbb{P}\{X_{2k-1} + X_{2k} \neq 7 \forall k < 6\} = \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^5 \{X_{2k-1} + X_{2k} \neq 7\}\right) = 1 - \prod_{k=1}^5 \mathbb{P}\{X_{2k-1} + X_{2k} \neq 7\} = 1 - \prod_{k=1}^5 \frac{5}{6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \end{aligned}$$

3. Bisogna calcolare

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_{2k-1} + X_{2k} \neq 7 \forall k \leq 6\} &= \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^6 \{X_{2k-1} + X_{2k} \neq 7\}\right) = \prod_{k=1}^6 \mathbb{P}\{X_{2k-1} + X_{2k} \neq 7\} = \prod_{k=1}^6 \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \end{aligned}$$

Esercizio 3. Consideriamo le variabili aleatorie $(X_i)_i$ i.i.d. di legge $Be(p)$. Allora l'evento $\{X_i = 1\}$ rappresenta una risposta esatta all' i -esima domanda, per $i = 1, \dots, 10$. Il gioco finisce alla domanda

$$T := \begin{cases} \inf\{n \geq 1 \mid X_n = 1\} \\ 11 \quad \text{se l'insieme sopra è vuoto} \end{cases}$$

(in realtà si può dare un qualunque valore fittizio invece di 11). Possiamo definire una variabile aleatoria che rappresenta il montepremi come

$$X := \begin{cases} 2^{10-T} & \text{se } T \leq 10, \\ 0 & \text{se } T = 11 \end{cases}$$

Allora X assume valori sull'insieme $\{0, 1, 2, 2^2, \dots, 2^9\}$, ed ha densità discreta

$$p_X(0) = \mathbb{P}\{X = 0\} = \mathbb{P}\{T = 11\} = \mathbb{P}\{X_1 = \dots = X_{10} = 0\} = (1-p)^{10}$$

dove abbiamo usato l'indipendenza delle $(X_i)_i$, e per ogni $k = 0, \dots, 9$,

$$p_X(2^k) = \mathbb{P}\{X = 2^k\} = \mathbb{P}\{T = 10-k\} = \mathbb{P}\{X_1 = 0, \dots, X_{10-k-1} = 0, X_{10-k} = 1\} = p(1-p)^{9-k}$$

e ovviamente $p_X(t) = 0$ per ogni $t \notin \{0, 1, 2, 2^2, \dots, 2^9\}$.

Esercizio 4.

1. Per ogni $z \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(z) &= P\{X+Y=z\} = \mathbb{P}\left(\bigcup_x \{X=x, Y=z-x\}\right) = \\ &= \sum_x \mathbb{P}\{X=x, Y=z-x\} = \sum_x \mathbb{P}\{X=x\}\mathbb{P}\{Y=z-x\} = \\ &= \sum_x p_X(x)p_Y(z-x) \end{aligned}$$

e l'ultima uguaglianza segue in modo analogo.

2. In questo caso abbiamo che $p_X(x) = p_Y(x) = 0$ per ogni $x, y < 0$. Allora anche $X+Y$ assume valori in $\mathbb{N}$, e per ogni $z \in \mathbb{N}$

$$p_{X+Y}(z) = \sum_{x \geq 0} p_X(x)p_Y(z-x) = \sum_{x=0}^z p_X(x)p_Y(z-x)$$

poichè $p_Y(z-x) = 0$ per ogni $x > z$.

Esercizio 5. La notazione è notevolmente semplificata se si modella il prezzo delle azioni in questo modo. Consideriamo $(X_i)_i$ i.i.d. di legge $Be(p)$, e definiamo $Y_i := 2X_i - 1$ e $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$. Allora Y_i rappresenta la variazione di prezzo dell' i -esimo giorno, e S_n la variazione di prezzo dopo n giorni. Se definiamo poi $T_n := \sum_{i=1}^n X_i$, allora $T_n \sim B(n, p)$ e $S_n = \sum_{i=1}^n (2X_i - 1) = 2 \sum_{i=1}^n X_i - n = 2T_n - n$.

1. Bisogna calcolare

$$\mathbb{P}\{S_2 = 0\} = \mathbb{P}\{2T_2 - 2 = 0\} = \mathbb{P}\{T_2 = 1\} = 2p(1-p)$$

2. Calcoliamo

$$\mathbb{P}\{S_3 = 1\} = \mathbb{P}\{2T_3 - 3 = 1\} = \mathbb{P}\{T_3 = 2\} = 3p^2(1-p)$$

3. Questo punto si può fare in diversi modi. Un modo è

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_1 = 1 | S_3 = 1\} &= \frac{\mathbb{P}\{S_1 = 1, S_3 = 1\}}{\mathbb{P}\{S_3 = 1\}} = \frac{\mathbb{P}\{Y_1 = 1, Y_2 + Y_3 = 0\}}{3p^2(1-p)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}\{Y_1 = 1\}\mathbb{P}\{Y_2 + Y_3 = 0\}}{3p^2(1-p)} = \frac{p \cdot 2p(1-p)}{3p^2(1-p)} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

e a conclusioni analoghe si arriva utilizzando la formula di Bayes.

Esercizio 6. Definiamo gli eventi $A_j := \{ \text{la scatola proviene dal } j\text{-esimo macchinario} \}$, $j = 1, 2, 3$. Allora $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, e l'unione è disgiunta, e si ha $\mathbb{P}(A_1) = 1/2$, $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = 1/4$. Modellizziamo inoltre i difetti degli occhiali con delle variabili aleatorie di Bernoulli definite da

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{se l}'i\text{-esimo occhiale è difettoso} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora le $(X_i)_i$ sono i.i.d. con legge $Be(p_i)$ sotto ciascuna delle $\mathbb{P}(\cdot|A_i)$, dove $p_1 = 1/100$, $p_2 = 1/200$ e $p_3 = 1/300$. Consideriamo poi $S_{100} := \sum_{i=1}^{100} X_i \sim B(100, p_i)$ sotto $\mathbb{P}(\cdot|\{Y = i\})$.

1. Applicando la formula della probabilità totale, abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_{100} > 0\} &= 1 - \mathbb{P}\{S_{100} = 0\} = 1 - \sum_{j=1}^3 \mathbb{P}(\{S_{100} = 0\}|A_j)\mathbb{P}(A_j) = \\ &= 1 - \sum_{j=1}^3 \binom{100}{0} (1 - p_j)^{100} \mathbb{P}(A_j) = \\ &= 1 - \left(\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{100} \cdot \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{300}\right)^{100} \cdot \frac{1}{4} \right) = \\ &= 1 - 0.513492 = 0.486508 \end{aligned}$$

2. Applicando la formula di Bayes, bisogna calcolare

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 | \{S_{100} = 2\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{S_{100} = 2\} | A_1) \mathbb{P}(A_1)}{\sum_{j=1}^3 \mathbb{P}(\{S_{100} = 2\} | A_j) \mathbb{P}(A_j)} = \frac{\binom{100}{2} p_1^2 (1 - p_1)^{98} \frac{1}{2}}{\sum_{j=1}^3 \binom{100}{2} p_j^2 (1 - p_j)^{98} \mathbb{P}(A_j)} = \\ &= \frac{\binom{100}{2} \left(\frac{1}{100}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{98} \cdot \frac{1}{2}}{\binom{100}{2} \left(\left(\frac{1}{100}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{98} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{200}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{98} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{300}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{300}\right)^{98} \cdot \frac{1}{4}\right)} = \\ &= \frac{0.092432}{0.121275} = 0.762172 \end{aligned}$$

dove per il denominatore abbiamo applicato la formula della probabilità totale.