Soluzioni

Esercizio 1. È sufficiente calcolare

$$f(k) := \frac{\mathbb{P}\{X = k + 1\}}{\mathbb{P}\{X = k\}}$$

per ogni k tale che $\mathbb{P}\{X = k\} > 0$.

1. Se $X \sim B(n, p)$, allora per ogni $k = 0, \dots, n - 1$,

$$f(k) := \frac{\mathbb{P}\{X = k + 1\}}{\mathbb{P}\{X = k\}} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p}$$

e quindi $\mathbb{P}\{X = k + 1\} = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p} \mathbb{P}\{X = k\}$.

2. Se $X \sim Po(\lambda)$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$f(k) := \frac{\mathbb{P}\{X = k + 1\}}{\mathbb{P}\{X = k\}} = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}}{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}} = \frac{\lambda}{k+1}$$

e quindi $\mathbb{P}\{X = k + 1\} = \frac{\lambda}{k+1} \mathbb{P}\{X = k\}$.

Notiamo che questa relazione segue anche come limite dal punto 1.: se infatti abbiamo una successione di leggi $B(n, p_n)$, con $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-k}{k+1} \frac{p_n}{1-p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{np_n - kp_n}{(k+1)(1-p_n)} = \frac{\lambda - 0}{(k+1) \cdot 1} = \frac{\lambda}{k+1}$$

3. Se $X \sim Ge(p)$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f(k) := \frac{\mathbb{P}\{X = k + 1\}}{\mathbb{P}\{X = k\}} = \frac{p(1-p)^k}{p(1-p)^{k-1}} = 1 - p$$

e quindi $\mathbb{P}\{X = k + 1\} = (1-p) \mathbb{P}\{X = k\}$.

Esercizio 2.

1. Usando la densità della binomiale, si ha

$$\mathbb{P}\{X = 0\} = (1 - p)^n = (1 - 0.1)^{15} = 0.2058$$

$$\mathbb{P}\{X = 1\} = \binom{15}{1} 0.1(1 - 0.1)^{14} = 0.3431$$

$$\mathbb{P}\{X = 2\} = \binom{15}{2} 0.1^2(1 - 0.1)^{13} = 0.2668$$

$$\mathbb{P}\{X = 3\} = \binom{15}{3} 0.1^3(1 - 0.1)^{12} = 0.1285$$

$$\mathbb{P}\{X = 4\} = \binom{15}{4} 0.1^4(1 - 0.1)^{11} = 0.0428$$

$$\mathbb{P}\{X = 5\} = \binom{15}{5} 0.1^5(1 - 0.1)^{10} = 0.0104$$

2. Poichè X ha legge discreta e a valori interi, abbiamo

$$F_X(n) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}\{X = i\} = F_X(n-1) + \mathbb{P}\{X = n\}$$

quindi

$$F_X(0) = \mathbb{P}\{X = 0\} = 0.2058$$

$$F_X(1) = F_X(0) + \mathbb{P}\{X = 1\} = 0.2058 + 0.3431 = 0.5490$$

$$F_X(2) = F_X(1) + \mathbb{P}\{X = 2\} = 0.5490 + 0.2668 = 0.8159$$

$$F_X(3) = F_X(2) + \mathbb{P}\{X = 3\} = 0.8159 + 0.1285 = 0.9444$$

$$F_X(4) = F_X(3) + \mathbb{P}\{X = 4\} = 0.9444 + 0.0428 = 0.9872$$

$$F_X(5) = F_X(4) + \mathbb{P}\{X = 5\} = 0.9872 + 0.0104 = 0.9977$$

3. Cerchiamo il minimo x (ovviamente intero) tale che $\mathbb{P}\{X > x\} < \alpha = 0.05$, cioè $\mathbb{P}\{X \leq x\} = F_X(x) > 1 - \alpha = 0.95$. Poichè $F_X(3) = 0.9444 < 0.95 < 0.9872 = F_X(4)$, il minimo x per cui è verificata l'uguaglianza è $x = 4$.

4. Cerchiamo il minimo x tale che $\mathbb{P}\{X \leq x\} = F_X(x) > 1 - \alpha = 0.99$. Poichè $F_X(4) = 0.9872 < 0.99 < 0.9977 = F_X(5)$, il minimo x per cui è verificata l'uguaglianza stavolta è $x = 5$.

Esercizio 3.

1. Per ogni $k = 0, \dots, n$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n\} &= \frac{\mathbb{P}\{X_1 = k, X_1 + X_2 = n\}}{\mathbb{P}\{X_1 + X_2 = n\}} = \frac{\mathbb{P}\{X_1 = k, X_2 = n - k\}}{\mathbb{P}\{X_1 + X_2 = n\}} = \\ &= \frac{e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda_1 + \lambda_2} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k} = \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

dove $p := \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Quindi la legge di X_1 condizionata a $\{X_1 + X_2 = n\}$ è una legge $B(n, p)$.

2. Calcoliamo la densità congiunta di (Y, Z) per ogni $k = 0, 1, n \geq 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} p_{(Y,Z)}(k, n) &= \mathbb{P}\{Y = k, Z = n\} = \mathbb{P}\{Y = k, YX_1 + X_2 = n\} = \\ &= \mathbb{P}\{Y = k, kX_1 + X_2 = n\} = \mathbb{P}\{Y = k\} \mathbb{P}\{kX_1 + X_2 = n\} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'indipendenza delle variabili aleatorie Y, X_1, X_2 . Ci sono ora due casi:

$$p_{(Y,Z)}(0, n) = \mathbb{P}\{Y = 0\} \mathbb{P}\{X_2 = n\} = (1-p) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

e

$$p_{(Y,Z)}(1, n) = \mathbb{P}\{Y = 1\} \mathbb{P}\{X_1 + X_2 = n\} = p e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^n}{n!}$$

che si può scrivere in forma più compatta come

$$\begin{aligned} p_{(Y,Z)}(k, n) &= p e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^n}{n!} \mathbf{1}_{\{k=1\}} + (1-p) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbf{1}_{\{k=0\}} = \\ &= k p e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^n}{n!} + (1-k)(1-p) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-(k\lambda + \lambda)} \frac{(k\lambda + \lambda)^n}{n!} p^k (1-p)^{1-k} \end{aligned}$$

per ogni $n \geq 0, k = 0, 1$. Possiamo ora calcolare la densità marginale di Z : per ogni $n \geq 0$,

$$p_Z(n) = p e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^n}{n!} + (1-p) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} (1-p + p e^{-\lambda} 2^n)$$

Esercizio 4.

1. Si possono immaginare X e Y come gli istanti del primo successo di due processi di Bernoulli indipendenti tra di loro, rispettivamente di parametro $p := 1/6$ e $q := 1/3$. Allora $X \sim Ge(p)$ e $Y \sim Ge(q)$ e sono indipendenti.
2. Per calcolare la legge di Z è utile calcolarne la funzione di ripartizione. Poichè Z assume valori in $\mathbb{N}^*$, abbiamo che per ogni $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}F_Z(n) &= \mathbb{P}\{\max(X, Y) \leq n\} = \mathbb{P}\{X \leq n, Y \leq n\} = \mathbb{P}\{X \leq n\}\mathbb{P}\{Y \leq n\} = \\ &= F_X(n)F_Y(n) = (1 - (1 - p)^n)(1 - (1 - q)^n)\end{aligned}$$

Allora si ha che per ogni $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Z = n\} &= \mathbb{P}\{n - 1 < Z \leq n\} = F_Z(n) - F_Z(n - 1) = \\ &= (1 - (1 - p)^n)(1 - (1 - q)^n) - (1 - (1 - p)^{n-1})(1 - (1 - q)^{n-1}) = \\ &= p(1 - p)^{n-1} + q(1 - q)^{n-1} - (p + q - pq)(1 - p - q + pq)^{n-1} = \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{4}{9} \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

Procediamo analogamente per W e ne calcoliamo la funzione di ripartizione. Poichè W assume valori in $\mathbb{N}^*$ ed è il minimo di due variabili aleatorie indipendenti, sappiamo che per ogni $n \geq 1$,

$$1 - F_W(n) = 1 - F_{\min(X, Y)}(n) = (1 - F_X(n))(1 - F_Y(n)) = (1 - p)^n(1 - q)^n$$

Allora si ha che per ogni $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{W = n\} &= F_W(n) - F_W(n - 1) = \\ &= 1 - (1 - p)^n(1 - q)^n - 1 + (1 - p)^{n-1}(1 - q)^{n-1} = \\ &= (1 - p)^{n-1}(1 - q)^{n-1}(1 - (1 - p)(1 - q)) = \\ &= (p + q - pq)(1 - p - q + pq)^{n-1} = \frac{4}{9} \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

e quindi $W \sim Ge(\frac{4}{9})$.

3. Possiamo procedere in questo modo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X \geq Y\} &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \geq Y, Y = n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X \geq n, Y = n\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X \geq n\}\mathbb{P}\{Y = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - F_X(n - 1))p_Y(n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1}q(1 - q)^{n-1} = q \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p - q + pq)^k = \frac{q}{p - q + pq} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$