

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Siccome $X \geq 0$ $\mathbb{P}$ -q.c., detta p_X la sua densità discreta abbiamo che

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} np_X(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n p_X(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} p_X(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X \geq k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X > k\}$$

dove abbiamo potuto invertire l'ordine delle sommatorie poichè la serie è positiva.

2. Utilizzando il risultato del punto 1. e ricordando risultati notevoli sulla legge geometrica (in particolare che $\mathbb{P}\{X > k\} = (1-p)^k$), abbiamo che

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X > k\} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

Esercizio 2.

1. Per $k = 0$ si ha che

$$p_Y(0) = \mathbb{P}\{Y = 0\} = \mathbb{P}\{X = 0 \mid X > 0\} = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

mentre per $k \geq 1$ si ha:

$$\mathbb{P}\{Y = k\} = \mathbb{P}\{X = k \mid X > 0\} = \frac{\mathbb{P}\{X = k, X > 0\}}{\mathbb{P}\{X > 0\}} = \frac{\mathbb{P}\{X = k\}}{1 - \mathbb{P}\{X = 0\}} = \frac{p_X(k)}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}{1 - e^{-\lambda}}$$

2. Applicando la definizione di speranza di una variabile aleatoria discreta si ha che

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}\{Y = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}\{Y = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{p_X(k)}{1 - e^{-\lambda}} = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} k p_X(k) = \frac{\mathbb{E}[X]}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

3. Innanzitutto calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}\{Y = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathbb{P}\{Y = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{p_X(k)}{1 - e^{-\lambda}} = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_X(k) = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{\lambda^2 + \lambda}{1 - e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

quindi si ha

$$\text{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{\lambda^2 + \lambda}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{\lambda^2}{(1 - e^{-\lambda})^2}$$

Esercizio 3. Possiamo definire una famiglia $(X_i)_i$ i.i.d. di legge uniforme su $\{1, \dots, 20\}$ e per ogni i le variabili aleatorie $Y_i := \mathbf{1}_{\{X_i=20\}}$; allora anche le $(Y_i)_i$ sono i.i.d. e hanno legge di Bernoulli di parametro $p = \mathbb{P}\{X_i = 20\} = 1/20$.

1. Dobbiamo calcolare

$$\mathbb{E}[X_i] = \sum_{k=1}^{20} k \frac{1}{20} = \frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} k = \frac{1}{20} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 10.5$$

2. Per ogni n abbiamo che

$$\mathbb{P}\{\exists k \leq n : X_k = 20\} = 1 - \mathbb{P}\{X_k \neq 20 \quad \forall k \leq n\} = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n$$

quindi se si impone che

$$\mathbb{P}\{\exists k \leq n : X_k = 20\} \geq 0.5$$

si ha che

$$1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n \geq 0.5$$

e quindi $(\frac{19}{20})^n \leq 0.5$, che passando ai logaritmi è equivalente a

$$n \geq \frac{\log 0.5}{\log \frac{19}{20}} = \frac{\log 0.5}{\log 0.95} = 13.51$$

in qualunque base si calcolino i logaritmi. Poichè ovviamente n deve essere un numero intero, bisogna avere $n \geq 14$.

3. Se definiamo $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$, allora $S_n \sim B(n, p)$, e dobbiamo calcolare

$$\mathbb{E}[S_{20}] = 20p = 20 \cdot \frac{1}{20} = 1$$

4. Dobbiamo calcolare

$$\mathbb{P}\{S_{20} \geq 1\} = 1 - \mathbb{P}\{S_{20} = 0\} = 1 - (1 - p)^{20} = 1 - \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{20} = 0.641514$$

Nota: il valore di $(1 - \frac{1}{20})^{20} = 0.358486$ è vicino ad $e^{-1} = 0.367879$.

Esercizio 4.

1. Per ogni $b \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\text{Var} [X+b] = \mathbb{E}[(X+b-\mathbb{E}[X+b])^2] = \mathbb{E}[(X+b-\mathbb{E}[X]-b)^2] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \text{Var} [X]$$

2. L'espressione da minimizzare è

$$\text{Var} [X - aY - b] = \text{Var} [X - aY] = \text{Var} [X] + a^2 \text{Var} [Y] - 2a \text{Cov} (X, Y)$$

che ha minimo globale per

$$a^* = \frac{\text{Cov} (X, Y)}{\text{Var} [X]}$$

3. Per ogni a fissato, minimizzare $\mathbb{E}[(X - aY - b)^2]$ è equivalente a minimizzare $|\mathbb{E}[(X - aY - b)]| = |\mathbb{E}[X] - a\mathbb{E}[Y] - b|$. Basta allora porre $b := \mathbb{E}[X] - a\mathbb{E}[Y]$ ed abbiamo trovato il punto di minimo.

4. Abbiamo che per ogni $b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[(X - aY - b)^2] = \text{Var} [X - aY - b] + \mathbb{E}[(X - aY - b)]^2 \geq \text{Var} [X - aY]$$

e quindi, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[(X - aY - b)^2] \geq \min_a \text{Var} [X - aY]$$

minimo che si raggiunge per $a = a^*$ trovato nel punto 2. Ora, se nel primo membro si pone $a = a^*$ e $b = b^* := \mathbb{E}[X] - a^*\mathbb{E}[Y]$, si ha

$$\mathbb{E}[(X - a^*Y - b^*)^2] = \text{Var} [X - a^*Y - b^*] + \mathbb{E}[(X - a^*Y - b^*)]^2 = \text{Var} [X - a^*Y] = \min_a \text{Var} [X - aY]$$

e quindi (a^*, b^*) è un punto di minimo globale.