Soluzioni

Esercizio 1.

1. Usando il fatto che per ogni $t > 0$ abbiamo $\mathbb{P}\{X > t\} = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}$, calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X > t + s \mid X > t\} &= \frac{\mathbb{P}\{X > t+s, X > t\}}{\mathbb{P}\{X > t\}} = \frac{\mathbb{P}\{X > t+s\}}{\mathbb{P}\{X > t\}} = \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}\{X > s\}\end{aligned}$$

2. Definiamo $g(t) := \mathbb{P}\{X > t\} = 1 - F_X(t)$. Allora la proprietà di assenza di memoria enunciata è equivalente a $g(t + s) = g(t)g(s)$ per ogni $t, s > 0$. Inoltre sappiamo che la funzione g è continua a destra. Se ora riusciamo a dimostrare che è anche continua a sinistra, allora deve essere la funzione esponenziale, poichè questa è l'unico omomorfismo continuo tra il gruppo additivo e il gruppo moltiplicativo nei reali. Ma per ogni $t_0 > 0$ si ha che

$$\lim_{t \to t_0^-} g(t) = \lim_{h \to 0^+} g(t_0 - h) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(t_0)}{g(h)} = g(t_0)$$

poichè $\lim_{h \to 0^+} g(h) = g(0) = 1$

Esercizio 2. Definiamo $A := \{X > 15\}$ e $B := \{X > 45\}$. Allora Jones vuole calcolare la probabilità di B sapendo che si è verificato A:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}\{X > 45, X > 15\}}{\mathbb{P}\{X > 15\}} = \frac{\mathbb{P}\{X > 45\}}{\mathbb{P}\{X > 15\}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Questo perchè

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X > 45\} &= \int_{45}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{45}^{60} \frac{1}{60}\, dx = \frac{60}{60} - \frac{45}{60} = \frac{1}{4}, \\ \mathbb{P}\{X > 15\} &= \int_{15}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{15}^{60} \frac{1}{60}\, dx = \frac{60}{60} - \frac{15}{60} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Esercizio 3.

1. Per trovare la distribuzione di Z, calcoliamone la funzione di ripartizione. Ovviamente Z assume valori positivi, quindi $\forall t > 0$ abbiamo

$$F_Z(t) = \mathbb{P}\{-\log X \leq t\} = \mathbb{P}\{X \geq e^{-t}\} = 1 - e^{-t}$$

e ovviamente $F_Z(t) \equiv 0$ per $t < 0$. Questo significa che Z e W hanno legge $Exp(1)$.

2. Le due variabili aleatorie sono indipendenti, quindi $Z + W$ è una variabile aleatoria positiva che ha densità data dal prodotto di convoluzione

$$f_{Z+W}(u) = \int_{\mathbb{R}} f_Z(z) f_W(u - z)\, dz = \int_0^u e^{-z} e^{-(u-z)}\, dz = e^{-u} \int_0^u\, dz = ue^{-u}$$

per $u \geq 0$ e 0 altrimenti.

3. Possiamo infine trovare la legge di $XY = e^{-(Z+W)}$ calcolandone la funzione di ripartizione: siccome XY è compresa tra 0 e 1, per ogni $t \in (0,1)$ abbiamo

$$F_{XY}(t) = \mathbb{P}\{e^{-(Z+W)} \leq t\} = \mathbb{P}\{Z+W \geq -\log t\} = \int_{-\log t}^{+\infty} ue^{-u}\ du = \int_0^t (-\log v)\ dv$$

dove abbiamo fatto il cambio di variabile $v := e^{-u}$. Siccome F_{XY} è l'integrale di una funzione continua, ammette derivata prima e quindi la densità di XY è data da

$$f_{XY}(t) = F'_{XY}(t) = -\log t$$

4. Poniamo $Y_i := -\log X_i$. Allora, per rispondere, bisogna trovare la densità di $Y_1 + \ldots + Y_n$, con $(Y_i)_i$ i.i.d. di legge $Exp(1)$. Per quanto visto a lezione, $Y_1 + \ldots + Y_n \sim \Gamma(n,1)$, e quindi

$$f_{\sum_{i=1}^n X_i}(u) = \frac{1}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-u} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u) = \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} e^{-u} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u)$$

e quindi

$$\begin{aligned} F_{\prod_{i=1}^n X_i}(t) &= \mathbb{P}\{e^{-\sum_{i=1}^n X_i} \leq t\} = \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i \geq -\log t\right\} = \int_{-\log t}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-u}\ du = \\ &= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} (-\log v)^{n-1}\ dv \end{aligned}$$

e quindi la densità è uguale a

$$f_{\prod_{i=1}^n X_i}(t) = F'_{\prod_{i=1}^n X_i}(t) = \frac{1}{(n-1)!} (-\log t)^{n-1}$$

Esercizio 4.

1. Poichè l'integrale di una densità deve essere uguale a 1, abbiamo

$$1 = \int_0^{+\infty} Cxe^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = [-Ce^{-\frac{x^2}{2}}]_0^{+\infty} = C$$

e quindi $C = 1$.

2. Cerchiamo g che sia anche invertibile. Per ogni g invertibile abbiamo

$$F_X(t) = \mathbb{P}\{X \leq t\} = \mathbb{P}\{g(X) \leq g(t)\}$$

Ma dire che $g(X)$ ha legge $U(0,1)$ significa dire che per ogni $u \in [0,1]$,

$$F_{g(X)}(u) = \mathbb{P}\{g(X) \leq u\} = u$$

Confrontando gli ultimi due membri delle ultime due uguaglianze, abbiamo

$$F_X(t) = \mathbb{P}\{g(X) \leq g(t)\} = g(t) = \int_0^t xe^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}}$$

essendo in effetti a valori in $[0,1]$, soddisfa la richiesta.

3. Calcoliamo la funzione di ripartizione di Y, che è quasi certamente positiva. Per ogni $t \geq 0$ abbiamo

$$F_Y(t) = \mathbb{P}\{X^2 \leq t\} = \mathbb{P}\{X \leq \sqrt{t}\} = F_X(\sqrt{t}) = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$$

e quindi $Y \sim Exp(\frac{1}{2})$.

Esercizio 5. Possiamo rappresentare il risultato dell'i-esimo ragazzo tramite una variabile aleatoria $X_i \sim N(600; 100^2)$, e supporre che queste variabili aleatorie siano indipendenti.

1. Sfruttando l'indipendenza, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_i < 600 \quad \forall i = 1, \dots, 5\} &= \prod_{i=1}^{5} \mathbb{P}\{X_i < 600\} = \prod_{i=1}^{5} \mathbb{P}\left\{\frac{X_i - 500}{100} \leq \frac{600 - 500}{100}\right\} = \\ &= \prod_{i=1}^{5} \Phi(1) = \Phi(1)^5 = 0.84134^5 = 0.42155\end{aligned}$$

dove Φ è la funzione di ripartizione di una legge $N(0,1)$ e dove abbiamo usato il fatto che la legge normale è assolutamente continua.

2. Per rispondere, conviene definire nuove variabili aleatorie $Y_i := \mathbf{1}_{\{X_i > 640\}}$. Allora le $(Y_i)_i$ sono indipendenti (perchè funzioni di variabili aleatorie indipendenti) e identicamente distribuite con legge di Bernoulli di parametro

$$\begin{aligned}p &:= \mathbb{P}\{X_i > 640\} = 1 - \mathbb{P}\{X_i \leq 640\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\frac{X_i - 500}{100} \leq \frac{640 - 500}{100}\right\} = \\ &= 1 - \Phi(1.4) = 1 - 0.91924 = 0.08076\end{aligned}$$

Allora il numero degli studenti con punteggio maggiore di 640 è $\sum_{i=1}^{5} Y_i \sim B(5,p)$, e dobbiamo calcolare

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{5} Y_i = 3\right\} = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 = 10 \cdot 0.08076^3 \cdot 0.91924^2 = 0.00445$$

Esercizio 6.

1. Dobbiamo calcolare il quantile di livello $\alpha = 0.9$ per una variabile aleatoria $X \sim N(63.7, (11.4)^2)$, cioè trovare x tale che $\mathbb{P}\{X \leq x\} = \alpha$. Abbiamo

$$0.9 = \mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\left\{\frac{X - 63.7}{11.4} \leq \frac{x - 63.7}{11.4}\right\}$$

Poichè $\frac{X-63.7}{11.4} \sim N(0,1)$, e per una variabile aleatoria $N(0,1)$ si ha $q_{0.9} = 1.28$, abbiamo che $\frac{x-63.7}{11.4} = 1.28$, e quindi $x = 63.7 + 11.4 \cdot 1.28 = 78.3$.

2. Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X \geq 90\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{X - 63.7}{11.4} \geq \frac{90 - 63.7}{11.4}\right\} = \mathbb{P}\{Z \geq 2.30\} = 1 - \mathbb{P}\{Z < 2.30\} = \\ &= 1 - \Phi(2.30) = 1 - 0.9893 = 0.0107\end{aligned}$$

3. Il numero di ragazzi con "pressione alta" è una variabile aleatoria binomiale con parametri $n = 5$ e $p = 0.0107$ (se si segue il criterio del punto 2.). Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{5} Y_i > 1\right\} &= 1 - \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{5} Y_i \leq 1\right\} = 1 - \binom{5}{0} p^0 (1-p)^5 - \binom{5}{1} p^1 (1-p)^4 = \\ &= 1 - 0.947633 - 0.051247 = 0.001121\end{aligned}$$