Traccia della soluzione degli esercizi del Capitolo 1

Esercizio 1 Esprimere ciascuno dei seguenti eventi in termini degli eventi A, B, C.

1. Almeno un evento si verifica.
2. Al più un evento si verifica.
3. Nessun evento si verifica.
4. Tutti gli eventi si verificano.
5. Si verifica esattamente un evento.
6. Due eventi su tre si verificano.
7. O si verifica A, oppure, se non si verifica A, neppure B si verifica.

Soluzione.

1. $A \cup B \cup C$.
2. $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$.
3. $A^c \cap B^c \cap C^c$.
4. $A \cap B \cap C$.
5. $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$.
6. $A \cup (A^c \cap B^c)$

Esercizio 2 Siano A, B due eventi arbitrari.

a. Mostrare che

$$P(A)P(A^c) \leq \frac{1}{4}.$$

b.* Mostrare che

$$P(A \cap B) \leq P(A)P(B) + \frac{1}{4}.$$

Soluzione.

a. Posto $x = P(A)$, basta osservare che

$$x(1 - x) \leq 1/4$$

per $x \in [0, 1]$.

b. Dal punto a.

$$\frac{1}{4} \geq P(A \cap B)[1 - P(A \cap B)] \geq P(A \cap B)[1 - P(A)],$$

che implica

$$P(A \cap B) \leq P(A \cap B)P(A) + \frac{1}{4} \leq P(B)P(A) + \frac{1}{4}.$$

Esercizio 3 Siano A, B eventi. Mostrare che

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Soluzione. Si noti che

$$A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B),$$

e quest'ultima è un'unione disgiunta. Perciò

$$P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B),$$

e si conclude usando la formula per $P(A \cup B)$.

Esercizio 4 Siano A, B, C tre eventi. Mostrare che

$$P(A \Delta C) \leq P(A \Delta B) + P(B \Delta C).$$

Quando vale l'uguaglianza?

Soluzione. Anzitutto si mostra che

$$A \Delta C \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C),$$

da cui la disuguaglianza segue per subadditività. Inoltre, si osservi che

$$[(A \Delta B) \cup (B \Delta C)] \setminus (A \Delta C) = (A \Delta B) \cap (B \Delta C).$$

Allora valgono le seguenti equivalenze:

$$P(A \Delta C) = P[(A \Delta B) \cup (B \Delta C)] \iff P\{[(A \Delta B) \cup (B \Delta C)] \setminus (A \Delta C)\} = 0 \iff$$

$$\iff P[(A \Delta B) \cap (B \Delta C)] = 0 \iff P[(A \Delta B) \cup (B \Delta C)] = P[(A \Delta B)] + P[(B \Delta C)].$$

Ne segue

$$P(A \Delta C) = P[(A \Delta B)] + P[(B \Delta C)] \iff P[(A \Delta B) \cap (B \Delta C)] = 0.$$

Esercizio 5 Da un mazzo di 52 carte si estraggono, a caso, tre carte. Calcolare la probabilità che:

a. tra le carte estratte vi sia almeno un asso;

b. le tre carte estratte siano di tre semi diversi;

c. almeno due delle carte estratte abbiano lo stesso numero o figura.

Soluzione.

a. Ω è l'insieme dei sottoinsiemi di tre elementi del mazzo di 52 carte, quindi $|\Omega| = \binom{52}{3}$. Il numero di modi di scegliere 3 carte in modo che non vi sia alcun asso è $\binom{48}{3}$. Quindi, la probabilità richiesta è

$$1 - \frac{\binom{52}{3}}{\binom{48}{3}}.$$

b. Sia A l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità. Scegliere un elemento di A significa i) scegliere 3 dei 4 colori disponibili ($\binom{4}{3}$ scelte) ii) una volta scelti i colori, ognuna delle 3 carte può essere scelta in 13 modi possibili. Dunque

$$|A| = \binom{4}{3} 13^3$$

che, divisa per $|\Omega|$, dà la probabilità richiesta.

c. Se B è l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità, B^c = le tre carte scelte hanno numero diverso. Scegliere un elemento di B^c significa scegliere i) tre numeri tra i 12 disponibili ($\binom{12}{3}$ scelte) ii) fissati i tre numeri ogni carta può essere scelta in 4 modi diversi. Dunque

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{\binom{12}{3} 4^3}{\binom{52}{3}}.$$

Esercizio 6 Un mazzo di 52 carte viene diviso a metà. Si determini la probabilità che ognuna delle due parti contenga carte rosse e nere in egual numero.

Soluzione.

Ci sono $\binom{52}{26}$ modi di scegliere 26 carte tra 52, quindi $\binom{52}{26}$ modi di dividere il mazzo (*casi possibili*). Ci sono esattamente 26 carte rosse tra le 52 carte, se ognuna delle due parti del mazzo deve contenere carte rosse e nere in egual numero, ognuna dovrà contenere 13 carte rosse. Scelgo quindi le 13 carte rosse di una parte in $\binom{26}{13}$ modi e le rimanenti 13 carte tra le 26 nere in $\binom{26}{13}$ modi. In definitiva:

$$P(\text{ciascuna parte contiene carte rosse in egual numero}) = \frac{\binom{26}{13}\binom{26}{13}}{\binom{52}{26}} \simeq 0.218126.$$

Esercizio 7 Si mescola accuratamente un mazzo di 52 carte da Poker.

a. Calcolare la probabilità che le prime due carte del mazzo siano rispettivamente l'asso e il due di fiori;

b. Calcolare la probabilità che tra le prime dieci carte del mazzo non vi siano carte di fiori.

Soluzione.

a. Possiamo scegliere $\Omega =$ insieme delle permutazioni di 52 elementi. Dunque $|\Omega| = 52!$. Se $A =$ "le prime due carte sono rispettivamente l'asso e il due di fiori, si vede che $|A| = 50!$, visto che le prime due carte sono fissate e ho libertà di scegliere l'ordine delle altre 50. Dunque

$$P(A) = \frac{50!}{52!} = \frac{1}{52 \cdot 51}.$$

b. Se B è l'evento in questione, per ogni elemento di B posso scegliere arbitrariamente le prime 10 carte tra le 39 che non sono di fiori. Ciò può essere fatto in $39 \cdot 38 \cdots 30$ modi. Una volta operata tale scelta, le 42 carte restanti possono essere disposte arbitrariamente, dunque in 42! modi diversi. Allora:

$$P(B) = \frac{39 \cdot 38 \cdots 30 \cdot 42!}{52!} = \frac{\binom{39}{10}}{\binom{52}{10}}.$$

Allo stesso risultato avremmo potuto arrivare anche osservando che gli insiemi (non ordinati) delle prime 10 carte del mazzo hanno tutti la stessa probabilità. Perciò, definendo $\Omega =$ "insieme dei sottoinsiemi di 10 carte", saremmo facilmente giunti allo stesso risultato.

Esercizio 8 Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?
Soluzione. Possiamo scegliere $\Omega =$ insieme dei sottoinsiemi di r elementi dell'insieme degli n biglietti. Se A è l'evento in questione, A^c è l'insieme dei sottoinsiemi di r elementi degli $n - m$ biglietti non vincenti. Allora

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{n-m}{r}}{\binom{n}{r}}.$$

Esercizio 9 Si lanciano 12 dadi. Qual è la probabilità che ognuno dei numeri $1, 2, 3, 4, 5, 6$ compaia esattamente 2 volte?
Soluzione. Si sceglie $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^1 2$. Se A è l'evento in questione, scegliere un elemento di A significa scegliere i due dadi che danno 1, quindi i due che danno 2, e così via. Allora

$$P(A) = \frac{\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{6^{12}}.$$

Esercizio 10 Alla biglietteria di un cinema ci sono $n+m$ persone in fila per acquistare un biglietto. Di esse, n hanno solo una banconota da 5000 Lire, le altre m solo una banconota da 10000 Lire. Il prezzo del biglietto è di 5000 lire. Assumendo che il cassiere, all'inizio, non abbia denaro, qual è la probabilità che ognuno dei clienti possa ricevere l'eventuale resto?
Soluzione. Vedere l'esempio 1.3.3, questo esercizio è del tutto equivalente.

Esercizio 11 n paia di guanti vengono mescolate, e poi distribuite a caso a n persone. Qual è la probabilità che ognuno riceva un guanto per la mano destra e uno per la sinistra?
Soluzione. Supponiamo di distribuire prima i primi n guanti alle n persone, poi gli altri n. Sia Ω l'insieme delle permutazioni dei $2n$ guanti. Supponiamo di numerarli da 1 a $2n$, da 1 a n i guanti destri. Se A è l'evento in questione, una permutazione σ appartiene ad A se e solo se manda $\{1, 2, \dots, n\}$ in sè, oppure $\{1, 2, \dots, n\}$ in $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$. L'insieme delle permutazioni che mandano $\{1, 2, \dots, n\}$ in sè ha cardinalità $(n!)^2$ (numero di permutazioni dei guanti destri $\times$ numero di permutazioni dei guanti sinistri), e lo stesso per quelle che mandano $\{1, 2, \dots, n\}$ in $\{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$. Dunque $|A| = 2(n!)^2$, e

$$P(A) = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}.$$

Esercizio 12 Si scelgano, a caso, due numeri dall'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. fissato $k \in \{2, \dots, n - 1\}$, qual è la probabilità che i due numeri scelti siano uno strettamente più grande e uno strettamente più piccolo di k?
Soluzione. Sia Ω l'insieme dei sottoinsiemi di due elementi di $\{1, 2, \dots, n\}$. L'evento in questione corrisponde alla scelta di un numero $< k$ ($k - 1$ scelte) e uno $> k$ ($n - k$ scelte). Dunque

$$P(A) = \frac{(k - 1)(n - k)}{\binom{n}{2}}.$$

Esercizio 13 Si considerino i numeri $\{1, 2, \dots, n\}$ e si esegua una permutazione casuale di essi. Qual è la probabilità che 1 e 2 siano successivi anche dopo la permutazione?
Soluzione. Sia Ω l'insieme delle permutazioni degli n numeri. Per le permutazioni σ dell'evento A in questione, vi sono $n - 1$ modi diversi di scegliere $\sigma(1)$, che determina anche il valore di $\sigma(2)$, mentre gli altri $\sigma(i)$, $i > 2$ si possono sciegliere a piacere in $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{\sigma(1), \sigma(2)\}$, il che si può fare in $(n - 2)!$ modi diversi. Dunque

$$P(A) = \frac{(n - 1)(n - 2)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Esercizio 14 Si considerino n persone selezionate in modo casuale. Quanto grande dev'essere n affinchè la probabilità che almeno due di essi compiano gli anni lo stesso giorno sia maggiore di $1/2$?
Soluzione. Sia $\Omega = \{1, 2, \dots, 365\}^n$ l'insieme delle possibli scelte dei giorni di compleanno, e A l'insieme degli elementi di Ω in cui almeno due componenti sono uguali. Il numero di elementi di A^c è $365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)$, da cui

$$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Si vede che tale espressione è decrescente in n è maggiore di $1/2$ per $n = 22$ e minore di $1/2$ per $n = 23$, che dunque è il numero minimo cercato.

Esercizio 15 Si supponga di avere un mazzo di n chiavi diverse. Dovendo aprire una serratura di cui si ha la chiave, si provano a caso le n chiavi, mettendo da parte quello già provate, fino a che non si è trovata la chiave giusta. Qual è la probabilità di trovare la chiave giusta dopo k tentativi, con $1 \leq k \leq n$?
Soluzione. Sia Ω l'insieme delle permutazioni delle n chiavi, e supponiamo che la chiave giusta sia la numero 1. L'evento in questione è $\{\sigma \in \Omega : \sigma(1) = k\}$, che ha cardinalità $(n-1)!$. Da cò segue subito che la probabilità richiesta è $(n-1)!/n! = 1/n$.

Esercizio 16 21 passeggeri salgono su un treno della metropolitana vuoto formato da 3 vagoni, e ognuno sceglie a caso il vagone su cui viaggiare. Si calcoli la probabilità che

1. ci siano 4 passeggeri nel primo vagone;
2. i passeggeri siano uniformemente distribuiti sui 3 vagoni;
3. 5 persone siano su un vagone, 6 su un altro e 10 sul rimanente.

Soluzione.

Ogni passeggero può scegliere tra 3 vagoni, quindi i casi possibili sono 3^{21}. Calcoliamo i casi favorevoli dei vari punti.

1. Scelgo i 4 passeggeri che siederanno nel 1^o vagone tra i 21 in $\binom{21}{4}$ modi. Rimangono $21-4=17$ passeggeri che vanno disposti nei rimanenti 2 vagoni in 2^{17} modi, pe un totale di $\binom{21}{4}2^{17}$ casi favorevoli. La probabilità cercata è:
$$\frac{\binom{21}{4}2^{17}}{3^{21}} \simeq 0.0749942.$$
2. Ci devono essere 7 passeggeri per ogni vagone. I casi favorevoli sono allora:
$$\binom{21}{7}\binom{21-7}{7}\binom{21-7-7}{7} = \frac{21!}{7!14!}\frac{14!}{7!7!}\frac{7!}{7!0!} = \frac{21!}{(7!)^3}.$$
La probabilità cercata è:
$$\frac{21!}{(7!)^3 3^{21}} \simeq 0.038151.$$
3. Conto prima il numero di casi favorevoli all'evento 5 sul I vagone, 6 sul II e 10 sul III. Si hanno
$$\binom{21}{5}\binom{21-5}{6}\binom{21-5-6}{10}$$
casi. Ora moltiplicando questo numero per 3!, cioè il numero di modi di permutare i 3 vagoni ottengo i casi favorevoli, e la probabilità cercata è:
$$\frac{\binom{21}{5}\binom{16}{6}3!}{3^{21}} \simeq 0.09347.$$

Esercizio 17 Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 sapendo che la somma dei punteggi ottenuti è 9?
Soluzione. Sia A = si ottiene almeno un sei e B = la somma dei punteggio ottenuti è nove. $|A \cap B| = 2$, $|B| = 4$, da cui $P(A|B) = 1/2$.

Esercizio 18 Siano A, B due eventi. Sapendo che $P(A|B) = 0.7$, $P(A|B^c) = 0.3$ e $P(B|A) = 0.6$, calcolare $P(A)$.
Soluzione. Posto $x = P(A)$, $y = P(B)$, per la formula delle probabilità totali

$$x = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = 0.7y + 0.3(1 - y).$$

Inoltre, per la formula di Bayes,

$$0.6 = P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.7y}{x}.$$

Abbiamo ottenuto allora un sistema lineare in x, y, che si risolve ottenendo $x = 21/46$.

Esercizio 19 Mostrare, con degli esempi, che entrambe le disuguaglianze $P(A|B) > P(A)$ e $P(A|B) < P(A)$ sono possibili.
Soluzione. Per il primo caso, basta considerare un evento B con $0 < P(B) < 1$ e prendere $A = B$. Per il secondo, si prenda un B come sopra, e $A = B^c$.

Esercizio 20 Sia S_{4n} l'insieme delle permutazioni di $\{0, 1, 2, \dots, 4n - 1\}$, con $n \geq 1$, e sia P la probabilità uniforme su S_{4n}. Si considerino gli eventi:

$$A = \{\sigma \in S_{4n} : \text{ per ogni } k \text{ pari, } \sigma(k) \text{ è pari}\}$$

$$B = \{\sigma \in S_{4n} : \text{ per ogni } k \leq 2n - 1,\ \sigma(k) \leq 2n - 1\}.$$

Calcolare $P(A), P(B)$ e $P(A|B)$.
Soluzione. Si noti, anzitutto, che $|S_{4n}| = (4n)!$. Definiamo:

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{ insieme dei numeri pari in } \{0, 1, 2, \dots, 4n - 1\} \\ E_2 &= \{0, 1, 2, \dots, 4n - 1\} \setminus E_1 \\ E_3 &= \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\} \\ E_4 &= \{0, 1, 2, \dots, 4n - 1\} \setminus E_3. \end{aligned}$$

Gli insiemi sopra definiti hanno tutti cardinalità $2n$.

Ogni elemento di A si ottiene dalla composizione di una permutazione di E_1 con una di E_2. Ne segue che

$$|A| = (2n)!^2 \Rightarrow P(A) = \frac{(2n)!^2}{(4n)!}.$$

Per la probabilità di B si ottiene lo stesso valore, scambiando E_1 e E_2 con E_3 e E_4.

Un elemento di $A \cap B$ si ottiene componendo permutazioni dei 4 insiemi disgiunti $E_1 \cap E_3$, $E_1 \cap E_4$, $E_2 \cap E_3$, $E_2 \cap E_4$, che hanno tutti cardinalità n. Allora

$$|A \cap B| = n!^4.$$

Infine

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{n!^4}{(2n)!^2}.$$

Esercizio 21 Il 2 per mille delle banconote da 50.000 Lire in corcolazione sono false. Una macchina riconosce come false il 98% delle banconote false e, per errore, l'1% di quelle autentiche.

a. Qual è la probabilità che una banconota presa a caso venga rilevata come falsa?

b. Qual è la probabilità che una banconota rilevata come falsa sia, in realtà , autentica?

Soluzione. Siano A = la banconota è falsa, B = la banconota è riconosciuta come falsa.

a.
$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = 0.98 \cdot 0.002 + 0.01 \cdot 0.998.$$

b. Basta usare la Formula di bayes

$$P(A^c|B) = \frac{P(B|A^c)P(A^c)}{P(B)}.$$

Esercizio 22 Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi indipendenti tali che $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1$. Mostrare che esiste $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $P(A_k) = 1$.

Soluzione. Si ha

$$0 = P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c).$$

Perciò $\exists k$ tale che $P(A_k^c) = 0$, cioè $P(A_k = 1)$.

Esercizio 23 Un'urna contiene M palline, di cui M_1 bianche.

a. Si effettuano n estrazioni successive, *con* reintroduzione. Si considerino gli eventi

$$B_j = \text{"la } j\text{-esima pallina estratta è bianca"}$$

$$A_m = \text{"delle } n \text{ palline estratte esattamente } m \text{ sono bianche"}$$

dove $m \leq n$. Calcolare $P(B_j|A_m)$.

b. Calcolare la probabilità condizionata del punto a. nel caso di estrazioni *senza* reintroduzione, supponendo che m sia tale che $P(A_m) > 0$.

Soluzione. Al solo scopo di semplificare la soluzione (ma si potrebbe fare altrimenti) consideriamo la seguente osservazione, valida sia per il punto a. che per il punto b. . Se si considera, nell'insieme Ω delle sequenze possibili di palline estratte, la funzione che scambia la prima pallina estratta con la j-esima, tale funzione è una corrispondenza biunivoca in Ω che manda A_m in sé e B_j in B_1, e quindi $B_j \cap A_m$ in $B_1 \cap A_m$. Poichè, sia in a. che in b., la probabilità su Ω è quella uniforme, tale trasformazione non cambia la probabilità degli eventi. In particolare $P(B_j \cap A_m) = P(B_1 \cap A_m)$. Non 'e dunque restrittivo assumere $j = 1$.

a. Si vede che $B_1 \cap A_m = B_1 \cap A'_m$ dove A'_m = nelle successive $n-1$ estrazioni si estraggono $m-1$ palline bianche. Inoltre B_1 e A'_m sono indipendenti. Perciò

$$P(B_1 \cap A_m) = \frac{M_1}{M}\binom{n-1}{m-1}\left(\frac{M_1}{M}\right)^{m-1}\left(1-\frac{M_1}{M}\right)^{n-m}.$$

Dato che

$$P(A_m) = \binom{n}{m}\left(\frac{M_1}{M}\right)^{m}\left(1-\frac{M_1}{M}\right)^{n-m},$$

si trova facilmente

$$P(B_1|A_m) = \frac{P(B_1 \cap A_m)}{P(A_m)} = \frac{m}{n}.$$

b. Si noti che $P(A_m|B_1)$ coincide con la probabilità che da un'urna contenente $M-1$ palline di cui $M_1 - 1$ bianche si estraggano (senza reintroduzione) $m-1$ palline bianche in $n-1$ estrazioni. Perciò

$$P(A_m|B_1) = \frac{\binom{M_1-1}{m-1}\binom{M-M_1}{n-m}}{\binom{M-1}{n-1}}.$$

Essendo

$$P(A_m) = \frac{\binom{M_1}{m}\binom{M-M_1}{n-m}}{\binom{M}{n}}$$

e

$$P(B_1) = \frac{M_1}{M},$$

con facili calcoli si ha

$$P(B_1|A_m) = \frac{P(A_m|B_1)P(B_1)}{P(A_m)} = \frac{m}{n}.$$

Esercizio 24 Siano A, B, C tre eventi in uno spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathcal{F})$. Si assuma che A, B, C siano indipendenti. Mostrare che

a. $A \cap B$ è indipendente da C.

b. $A \cup B$ è indipendente da C.

Soluzione.

a. Quasi ovvio:

$$P[(A \cap B) \cap C] = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = P(A \cap B)P(C).$$

b. È equivalente dimostrare che $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ è indipendente da C. Poichè gli eventi A^c, B^c, C sono indipendenti, ci siamo ricondotti al caso precedente visto in a.

Esercizio 25 A tre studenti viene posta la stessa domanda. Supponiamo di sapere che il primo risponderà esattamente con probabilità 2/3, il secondo con probabilità 1/2, il terzo con probabilità 1/3. Gli studenti non possono comunicare tra loro.

a. Se solo uno degli studenti dà la risposta esatta, qual è la probabilità che sia stato il primo?

b. Se due studenti hanno dato la risposta esatta, qual è la probabilità che il terzo abbia dato la risposta esatta?

Soluzione. Siano A_i = lo studente i-mo ha dato la risposta esatta, B = solo uno degli studenti ha dato la risposta esatta, C = esattamente due studenti hanno dato la risposta esatta.

a.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}.$$

b.

$$P(A_3|C) = \frac{P(A_3 \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}.$$

Esercizio 26 * Un'urna contiene n palline, che possono essere di due colori, rosso e verde. Non abbiamo idea di quante siano le palline rosse, sicchè riteniamo che tutti i possibili valori $k = 1, 2, \ldots, n$ del numero di palline rosse siano equiprobabili.

a. Si estrae una pallina dall'urna, che si rivela essere rossa. Sapendo ciò, per quale valore di k la probabilità che nell'urna vi fossero k palline rosse è massimizzata?

b. Si risponda alle medesima domanda posta in a., ma assumendo che dall'urna siano state estratte due palline, una rossa e una verde.

Soluzione. Siano A_k = nell'urna ci sono k palline rosse, B = la prima pallina estratta è rossa, C = le prime due palline estratte sono una rossa e una verde. Si noti che

$$P(B|A_k) = \frac{k}{n},\ P(C|A_k) = \frac{k(n-k)}{\binom{n}{2}},\ P(A_k) = \frac{1}{n}.$$

a.

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)} = \frac{\frac{k}{n}\frac{1}{n}}{P(B)},$$

che assume il valore massimo per $k = n$.

b.

$$P(A_k|C) = \frac{P(C|A_k)P(A_k)}{P(C)} = \frac{\frac{k(n-k)}{\binom{n}{2}}\frac{1}{n}}{P(C)},$$

che assume il valore massimo per $k = n/2$ se n è pari, altrimenti per $k = \frac{n}{2} \pm \frac{1}{2}$.

Esercizio 27 * Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità uniforme, in cui Ω contiene un numero primo di elementi. Descrivere tutte le coppie di eventi indipendenti.

Soluzione. Supponiamo $|\Omega| > 1$, altrimenti il problema è banale. Siano A e B indipendenti e non vuoti. Allora

$$\frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{|A||B|}{|\Omega|^2}'$$

da cui
$$|A||B| = |A \cap B||\Omega|.$$
Se $|A \cap B| = |A|$ (risp. $= |B|$) si ricava $|B| = |\Omega|$ (risp. $|A| = |\Omega|$), da cui $\mathcal{B} = \Omega$ (risp. $A = \Omega$). Se, invece, $|A \cap B| < |A|$, si ha che $|A|$ e $|B|$ dividono $|\Omega|$, e quindi sono uguali o a 1 o a $|\Omega|$. Si vede che la formula precedente non può essere verificata se $|A| = |B| = 1$, e quindi o $A = \Omega$ o $B = \Omega$. Pertanto, due eventi sono indipendenti se e solo se almeno uno dei due è uguale a Ω o a $\emptyset$.

Esercizio 28 Quante volte è necessario lanciare un dado affinchè la probabilità di ottenere almeno un 6 sia maggiore o uguale a 0.5?
Soluzione. La probabilità di non ottenere alcun 6 in n lanci è $\left(\frac{5}{6}\right)^n$, che è minore di 1/2 per $n \geq 4$.

Esercizio 29 Con 10 proiettili devo colpire 5 bersagli. Ad ogni tiro colpisco un bersaglio con probabilità 1/2, indipendentemente dall'esito degli altri tiri.

a. Qual è la probabilit'a che riesca effettivamente a colpire tutti e cinque i bersagli?
b. Qual è la probabilità che mi avanzino dei proiettili?

Soluzione.

a. La probabilità richiesta è quella di colpire almeno 5 centri in 10 tiri, che vale
$$\sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \frac{1}{2^{10}}.$$
b. La probabilità richiesta è quella di colpire almeno 5 centri in 9 tiri, che vale
$$\sum_{k=5}^{9} \binom{9}{k} \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 30 Un commerciante acquista certe componenti elettriche in egual misura da due fornitori A e B, Viene a sapere che il 15% delle componenti provenienti da B e' difettosa, cioe' si rompono dopo poche ore di utilizzo, contro solo il 3% di quelle provenienti da A. Il commerciante e' in procinto di mettere in vendita una confezione tali componenti, tutte provenienti dallo stesso fornitore, ma di cui non ha registrato la provenienza. Per conoscerne la provenienza ne testa 20, di cui 2 risultano difettose. Con quale grado di confidenza puo' ritenere che la partita gli sia stata fornita da B?
Soluzione. Si considerino gli eventi $A =$ la confezione proviene dal fornitore A, $B =$ la confezione proviene dal fornitore B, $C =$ di 20 pezzi testati 2 sono difettosi. Sappiamo che
$$P(C|A) = \binom{20}{2}(0.15)^2(0.85)^{18}, \ P(C|B) = \binom{20}{2}(0.03)^2(0.97)^{18}, \quad P(A) = P(B) = 1/2.$$
Per concludere basta applicare la formula di Bayes:
$$P(B|C) = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C|B)P(B) + P(C|A)P(A)}.$$

Esercizio 31 Un'azienda produce occhiali utilizzando tre diversi macchinari. Il primo macchinario produce mediamente un paio di occhiali difettosi ogni 100, il secondo ogni 200, il terzo ogni 300. Gli occhiali vengono imballati in scatole identiche, contenenti 100 paia. Ogni scatola contiene occhiali scelti a caso tra quelli prodotti da una sola delle tre macchine. Si supponga che il primo macchinario abbia una produzione doppia rispetto agli altri due, cioè una scatola scelta a caso ha probabilità 1/2 di essere prodotta dal primo macchinario, 1/4 da secondo e 1/4 dal terzo. Un ottico riceve una di queste scatole. Qual è la probabilità che trovi almeno un paio di occhiali difettoso?
Soluzione. Per $i = 1, 2, 3$, sia $A_i =$ i pezzi della scatola sono stati prodotti dall'i-mo macchinario, $B =$ almeno uno degli occhiali della scatola è difettoso. Sappiamo che

$$P(A_1) = 1/2,\ P(A_2) = P(A_3) = 1/4,$$

$$P(B|A_1) = 1 - P(B^c|A_1) = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{100},\ P(B|A_2) = 1 - \left(\frac{199}{200}\right)^{100},\ P(B|A_3) = 1 - \left(\frac{299}{300}\right)^{100}$$

Per concludere, basta usare la formula delle probabilità totali:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i).$$

Esercizio 32 Mostrare che se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono eventi indipendenti, allora

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_n^c).$$

Soluzione.

$$P(\cup_i A_i) = 1 - P(\cap_i A_i^c) = 1 - \prod_i P(A_i^c).$$

Esercizio 33 Da un'urna contenente n palline di cui k rosse e $n - k$ verdi, con $1 \leq k \leq n - 1$, si estrae una pallina e quindi, senza reimmetterla nell'urna, si estrae una seconda pallina. Si considerino gli eventi informalmente descritti da

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{la prima pallina estratta è rossa} \\ A_2 &= \text{la seconda pallina estratta è rossa.} \end{aligned}$$

Mostrare che A_1 e A_2 non sono indipendenti
Soluzione. Basta osservare che

$$P(A_1|A_2) = \frac{k-1}{n-1} \neq \frac{k}{n} = P(A_1).$$

Esercizio 34 Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventi indipendenti tali che $\sum_{i=1}^n P(A_i) \le 1$. Mostrare che

$$P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) \le n^{-n}.$$

(Sugg: usare il fatto che se $a_1, \dots, a_n \ge 0$ allora $(a_1 + \cdots + a_n)/n \ge (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{1/n}$.)
Soluzione. Usando l'indipendenza e la disuguaglianza suggerita:

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) = \left(\frac{P(A_1) + \cdots + P(A_n)}{n} \right)^n \le n^{-n}.$$

Esercizio 35 Il signor A riceve un'informazione che si esprime con un "si'" o con un "no", trasmette tale informazione al signor B, che la trasmette al signor C, che la trasmette al signor D, il quale la annuncia. Ognuno dei quattro signori, indipendentemente dagli altri, mente con probabilità 1/3. Se si sa che D ha annunciato l'informazione corretta, cioè quella che A ha ricevuto, qual è la probabilità che A abbia mentito?
Soluzione. Notare che D dà l'informazione corretta se e solo se il numero di persone che hanno mentito è un numero pari. Sia $E = D$ ha annunciato l'informazione corretta, $F = A$ ha mentito.

$$P(E) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{4}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4,$$

$$P(E \cap F) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4,$$

da cui si calcola $P(F|E)$.

Esercizio 36 Si voglia illuminare una stanza con un dato numero di lampadine. La probabilita' che una lampadina sopravviva almeno n giorni e' p^n, ove $p = 0.9$. Si puo' ritenere che le lampadine si comportino in modo indipendente. Quante lampadine devo installare affinche', con probabilita' almeno 0.99, dopo 10 giorni vi sia almeno una lampadina funzionante?
Soluzione. La probabilità che dopo 10 giorni tutte le N lampadine installate abbiano smesso di funzionare è

$$(1 - p^{10})^N \le 0.01 \iff N \ge \frac{\log(0.01)}{\log(1 - p^{10})}.$$

Esercizio 37 Il signor Bianchi da Roma e il signor Rossi da Milano decidono di incontrarsi a Roma. All'ultimo momento, Rossi, che è un tipo molto indeciso, rimette al caso la decisione di partire, lanciando una moneta. Successivamente, in caso di esito positivo, per scegliere quale dei 6 treni a sua disposizione prendere, tira un dado. Ora, se Bianchi va in stazione e osserva che Rossi non è su nessuno dei primi 5 treni, qual è la probabilità che Rossi arrivi con l'ultimo treno?
Soluzione.

Siano

$T_i \equiv$ "*Rossi parte con l'i-esimo treno*",

$V \equiv$ "*Rossi parte per Roma*",

$N \equiv$ "*Rossi non prende nessuno dei primi 5 treni*"

$$P(T_i) = P(T_i|V)P(V) = \frac{1}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$
$$P(N) = P(V^c) + P(T_6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$
$$P(T_6 \mid N) = \frac{P(N \mid T_6)P(T_6)}{P(N)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7}.$$

Esercizio 38 In un labirinto a T, ad un animale da laboratorio si dà la possibilità di andare a sinistra e ricevere cibo o di andare a destra e ricevere una leggera scossa elettrica. Assumete che prima di ogni condizionamento (nel tentativo 1) sia ugualmente probabile che gli animali vadano a destra o a sinistra. Dopo aver ricevuto il cibo ad un certo tentativo, le probabilità di andare a sinistra e a destra diventano 0.6 e 0.4, rispettivamente, per il tentativo successivo. Invece, dopo aver ricevuto una scossa elettrica ad un certo tentativo, le probabilità di andare a sinistra e a destra al tentativo successivo diventano rispettivamente 0.8 e 0,2, rispettivamente.

1. Qual è la probabilità che l'animale vada a sinistra al tentativo numero 2?
2. E al numero 3?
3. Se dopo il secondo tentativo si osserva che l'animale è a sinistra, qual è la probabilità che l'animale abbia ricevuto cibo prima dell'ultimo movimento?

Soluzione.

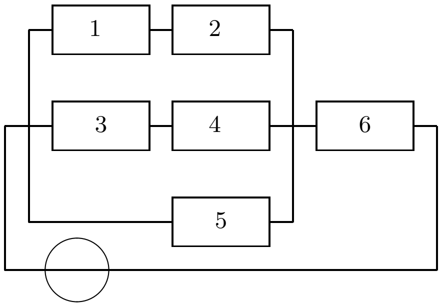
S_i : "i-esimo passo della cavia verso sinistra', $i = 1, \dots$

D_i : "i-esimo passo della cavia verso destra", $i = 1, \dots$

$P(S_1) = P(D_1) = 1/2$,
$P(S_{i+1}|S_i) = 0.6 \ \forall i = 1, \dots,$
$P(S_{i+1}|D_i) = 0.6, \ \forall i = 1, \dots$

1. $P(S_2) = P(S_2 \mid S_1)P(S_1) + P(S_2 \mid D_1)P(D_1) = 0.7 \Rightarrow \quad P(D_2) = 1 - P(S_2) = 0.3$
2. $P(S_3) = P(S_3 \mid S_2)P(S_2) + P(S_3 \mid D_2)P(D_2) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.3 \cdot 33/50.$
3. $P(S_1 \mid S_2) = \frac{P(S_2|S_1)P(S_1)}{P(S_2)} = 3/7.$

Esercizio 39 Si determini la probabilità che il circuito in figura sia "chiuso" supponendo che ciascun interruttore del circuito sia chiuso in modo indipendente e che la probabilità che l'i-esimo interruttore sia chiuso sia p_i, $i = 1, \dots, 6$.



Soluzione.

Sia A l'evento "il circuito è chiuso", e A_i, $i = 1, \ldots, 6$ l'evento "l'interruttore i-esimo è chiuso", allora,

$$\begin{aligned} A &= (A_1 \cap A_2 \cap A_6) \cup (A_3 \cap A_4 \cap A_6) \cup (A_5 \cap A_6) \\ &= [(A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) \cup A_5] \cap A_6, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) \cup A_5) P(A_6) \\ &= (p_1p_2 + p_3p_4 + p_5 - p_1p_2p_5 - p_3p_4p_5 - p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_4p_5)p_6. \end{aligned}$$

Esercizio 40 Un sistema ingegneristico di n componenti è detto sistema "k-su-n" se il sistema funziona se è solo se almeno k componenti su n funzionano. Supponiamo che tutte le componenti funzionino indipendentemente una dall'altra. Se l'i-esima componente funziona con probabilità p_i, qual è la probabilità che un sistema 2-su-4 funzioni?

Soluzione.

$$\begin{aligned} \Pr(\text{ 2 -su-4 funzioni}) = & \\ &= \Pr(\text{almeno 2 componenti su 4 funzionano}) \\ &= 1 - \Pr(\text{al più 1 componente su 4 funziona}) = \\ &= 1 - \Big[\Pr(\text{non funziona nessuna componente }) + \\ &\quad + \Pr(\text{funziona esattamente 1 componente})\Big] = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{4}(1-p_i) - p_1(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4) + \\ & - p_2(1-p_1)(1-p_3)(1-p_4) - p_3(1-p_1)(1-p_2)(1-p_4) - p_4(1-p_2)(1-p_3)(1-p_1) \end{aligned}$$

Se $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 2/3$, allora $\Pr(\text{ 2 -su- 4 funzioni}) = \frac{8}{9}$.

Esercizio 41 Siano date 2 urne U_1, U_2 tali che U_1 contiene 1 pallina bianca e 4 palline nere, U_2 contiene 5 palline bianche e 5 nere. Un giocatore estrarre a caso 2 palline, seguendo una certa strategia, e vince 100.000 Lit se le due palline sono dello stesso colore.

1. Quale delle seguenti tre strategie è preferibile per il giocatore:
   (*a*) Il giocatore sceglie a caso l'urna lanciando una moneta, estrae una pallina dall'urna, la rimette nell'urna, rilancia la moneta per scegliere nuovamente l'urna, quindi estrae la 2^a pallina.
   (*b*) Il giocatore sceglie a caso un'urna, estrae una pallina, la rimette nell'urna, quindi effettua l'estrazione della seconda pallina dalla stessa urna.
   (*c*) Il giocatore sceglie a caso un'urna, estrae una pallina, quindi effettua l'estrazione della seconda pallina dall'altra urna.
2. Qual è la probabilità di vincere se le due estrazioni con reimmissione avvengono da un'unica urna contenente il tolale delle palline bianche e nere delle due urne?

Soluzione.

1. L'insieme degli eventi elementari relativo all'esperimento "estrazione di 2 palline", è $\Omega = \{bb, bn, nb, nn\}$, indipendentemente dalla strategia adottata per selezionare le urne. Indichiamo con V_i l'evento "Vincere con la *i*-esima strategia," $i = 1, 2, 3$.
   (*a*) Con la prima strategia si hanno le seguenti 4 possibilità per selezionare le urne:
   $$H_1 = U_1U_1, \quad H_2 = U_1U_2, \quad H_3 = U_2U_1, \quad H_4 = U_2U_2$$
   con $\Pr(H_1) = \Pr(H_2) = \Pr(H_3) = \Pr(H_4) = 1/4$, dal momento che le scelte derivano da 2 lanci di 1 moneta regolare. Quindi,
   $$\Pr(\{bb\}) = \sum_{i=1}^{4} \Pr(\{bb\}|H_i)\Pr(H_i);$$
   $$\begin{aligned}\Pr(\{bb\}|H_1) &= \\ &= \Pr(\text{“estrarre con reimmissione 2 palline bianche dalla prima urna”}) \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{25}\end{aligned}$$
   $$\begin{aligned}\Pr(\{bb\}|H_2) &= \\ &= \Pr(\text{“estrarre 1 pallina bianca dalla prima urna e 1 nera dalla seconda”}) \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{10} = P(\{bb\}|H_3)\end{aligned}$$
   $$\begin{aligned}\Pr(\{bb\}|H_4) &= \\ &= \Pr(\text{“estrarre con reimmissione 2 palline bianche dalla seconda urna”}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$
   Quindi $\Pr(\{bb\}) = 49/400$.
   Allo stesso modo si dimostra che $\Pr(\{nn\}) = 1/4(16/25 + 4/5 + 1/4) = 169/400$, da cui: $\Pr(V_1) = 218/400 = \frac{109}{200} = 0.545$.

(*b*) Con la seconda strategia, una volta effettuata la scelta dell'urna per la prima estrazione, si effettueranno 2 estrazioni da quell'urna con reimmissione. Così,

$$\begin{aligned}
\Pr(\{bb\}) &= \Pr(\{bb\}|U_1)P(U_1) + \Pr(\{bb\}|U_2)\Pr(U_2) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{5}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}) = \frac{29}{200} \\
\Pr(\{nn\}) &= \Pr(\{nn\}|U_1)\Pr(U_1) + \Pr(\{nn\}|U_2)P(U_2) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{4}{5}\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}) = \frac{89}{200} \\
\Pr(V_2) &= \frac{118}{200} = \frac{59}{100} = 0.59.
\end{aligned}$$

(*c*) Con la terza strategia, scelta l'urna per la prima estrazione, si effettuera la seconda estrazione dall'altra urna. Così,

$$\begin{aligned}
\Pr(\{bb\}) &= \Pr(\{bb\}|U_1U_2)\Pr(U_1) + \Pr(\{bb\}|U_2U_1)\Pr(U_2) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{5}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{5}) = \frac{1}{10} \\
\Pr(\{nn\}) &= \Pr(\{nn\}|U_1U_2)\Pr(U_1) + \Pr(\{nn\}|U_2U_1)\Pr(U_2) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{4}{5}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{4}{5}) = \frac{2}{5} \\
\Pr(V_3) &= \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} = 0.5.
\end{aligned}$$

È preferibile la seconda strategia.

2. Sia U_3 un'urna che contiene 6 palline bianche e 9 palline nere. Con quest'urna, si ha $\Pr(\text{“vincere”}) = (6/15)^2 + (9/15)^2 = \frac{13}{25} = 0.52$.