Traccia della soluzione degli esercizi del Capitolo 2

Esercizio 42 In una procedura di controllo di produzione, n processori prodotti da un processo industriale vengono sottoposti a controllo. Si assuma che ogni pezzo, indipendentemente dagli altri, abbia probabilità $p \in (0, 1)$ di essere difettoso. Se un processore è funzionante supera sicuramente il test di controllo, se il processore è difettoso fallisce il test con probabilità $q \in (0, 1)$, indipendentemente dagli altri. Sia X = numero di processori che hanno fallito il test. Determinare la distribuzione di X.
Soluzione. Basta osservare che la probabilità che un pezzo fallisca il test è pq, e usare lo schema delle prove ripetute indipendenti, per ottenere

$$p_X(k) = \binom{n}{k} (pq)^k (1 - pq)^{n-k}.$$

Esercizio 43 Due dadi truccati sono tali che la probabilità di ottenere un sei è il doppio della probabilità di ottenere ogni altro punteggio. Qual è la media del punteggio ottenuto lanciando i due dadi?
Soluzione. Sia X_i il punteggio del dado i-mo, sicché il punteggio totale X è dato da $X = X_1 + X_2$. X_i assume i valori $1, 2, 3, 4, 5$ con probabilità $1/7$, e 6 con probabilità $2/7$, e perciò $E(X_i) = 27/7$, da cui $E(X) = 54/7$.

Esercizio 44 Da un'urna contenente r palline rosse e v palline verdi, si estraggono successivamente, senza reintroduzione, k palline, con $k \le \min(r, v)$. Per $i = 1, 2, \ldots, k$, sia

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-ma pallina estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e $X = X_1 + \cdots + X_k$.

a. Determinare la distribuzione di X.

b. Determinare le distribuzioni delle X_i.

c.* Mostrare che la densità congiunta delle X_i è data da

$$p_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k) = \frac{r(r-1)\cdots(r - \sum_{i=1}^k x_i + 1)v(v-1)\cdots(v - k + \sum_{i=1}^k x_i + 1)}{(r+v)(r+v-1)\cdots(r+v-k+1)}$$

d. Calcolare $E(X)$.

Soluzione. a. X è il numero di palline rosse estratte in k estrazioni senza reintroduzione, e quindi

$$p_X(n) = \binom{r}{n}\binom{v}{k-n} \Big/ \binom{r+v}{n}.$$

b. Identifichiamo l'insieme delle palline con $\{1, 2, \ldots, r + v\}$, convenendo che le palline rosse siano le prime r. Lo schema di estrazioni senza reitroduzione si può modellare scegliendo, come spazio campionario, $\Omega =$ insieme delle permutazioni di $\{1, 2, \ldots, r+v\}$, con la probabilità uniforme. Allora $\{X_i = 1\} = \{\sigma \in \Omega : \sigma(i) \in \{1, 2, \ldots, r\}\}$, che ha cardinalità $r(r+v-1)!$, e quindi probabilità $r/r + v$. In conclusione

$$p_{X_i}(1) = 1 - p_{X_i}(0) = \frac{r}{r+v}.$$

c. Per induzione su k. Per $k = 1$ la risposta è già in b. Altrimenti, se $x = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) \in \{0,1\}^k$,

$$P(X = x) = P(X_k = x_k | X_{k-1} = x_{k-1}, \ldots, X_1 = x_1) P(X_{k-1} = x_{k-1}, \ldots, X_1 = x_1).$$

Per $P(X_{k-1} = x_{k-1}, \ldots, X_1 = x_1)$ si usa l'ipotesi induttiva, mentre

$$P(X_k = 1 | X_{k-1} = x_{k-1}, \ldots, X_1 = x_1) = \frac{r - \sum_{i=1}^{k-1} x_i}{r + v - k + 1},$$

da cui si giunge alla conclusione.

d. Essendo $E(X_i) = r/r + v$, si ha $E(X) = kr/(r + v)$.

Esercizio 45 Per $n \geq 1$, sia X_n una variabile casuale che assume, con la stessa probabilità, i valori $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$. Se f è una funzione continua, sia

$$m_n = E(f(X_n)).$$

Mostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} m_n = \int_0^1 f(x) dx.$$

Soluzione. Si osserva che

$$E(f(X_n)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n),$$

che è una somma di Riemann per l'integrale $\int_0^1 f(x) dx$.

Esercizio 46 Siano X, Y variabili casuali a valori in $\mathbb{N}$, definite sullo stesso spazio di probabilità. Giustificare l'identità

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k, Y = n - k).$$

Soluzione. Basta osservare che

$$\{X + Y = n\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X = k, Y = n - k\},$$

e usare la σ-addidività.

Esercizio 47 * Sia X una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$. Allora

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

Soluzione.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{k} P(X = k)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = E(X).$$

Esercizio 48 Siano X, Y variabili aleatorie discrete, a valori in $\mathbb{N}$, con densità congiunta

$$p_{X,Y}(n,m) = c\frac{\lambda^n \mu^m \nu^{nm}}{n!m!}$$

dove $\lambda, \mu > 0$, $0 < \nu \leq 1$, e c è un'opportuna costante (quella per cui $\sum_{n,m} p_{X,Y}(n,m) = 1$).

a. Calcolare le densità marginali di X e Y.

b. Calcolare le probabilità condizionate $P(X = n|Y = m)$.

c.* Mostrare che gli eventi $\{X = n\}$, $\{Y = m\}$ sono indipendenti per ogni coppia $n, m \in \mathbb{N}$ se e solo se $\nu = 1$.

Soluzione. a. Sommando $p_{X,Y}$ su n e usando la serie esponenziale si trova

$$p_Y(m) = \frac{c\mu^m e^{\lambda\nu^m}}{m!}.$$

Il calcolo di p_X è del tutto analogo.

b. Usando la definizione di probabilità condizionata e il punto a.

$$P(X = n|Y = m) = \frac{p_{X,Y}(n,m)}{p_Y(m)} = \frac{\lambda^n \nu^{nm} e^{-\lambda\nu^m}}{n!}.$$

c. Se $\nu = 1$, si trova $p_{X,Y}(n,m) = p_X(n)p_Y(m)$, che equivale all'indipendenza degli eventi assegnati. Viceversa, assumiamo $p_{X,Y}(n,m) = p_X(n)p_Y(m)$ per ogi n, m. In altre parole

$$\frac{c\lambda^n \mu^m \nu^{mn}}{n!m!} = \frac{c^2 \lambda^n \mu^m e^{(\lambda\nu^m + \mu\nu^n)}}{n!m!},$$

cioè

$$\nu^{mn} = ce^{(\lambda\nu^m + \mu\nu^n)}.$$

Posto $m = n = 0$, si ricava $c = e^{-\lambda-\nu}$. Sostituendo, e scegliendo $m = 1, n = 0$, si trova

$$1 = e^{\lambda(\nu-1)},$$

da cui $\nu = 1$.

Esercizio 49 Si consideri la seguente classica strategia per il gioco della roulette. Gioco sempre sul rosso. Alla prima giocata punto un dollaro. Se perdo raddoppio la giocata, se vinco smetto. In ogni caso, dato che il mio capitale iniziale è 1023 dollari, se perdo 10 volte di seguito devo smettere. Sia X la differenza tra il mio capitale alla fine del gioco e il capitale iniziale. Calcolare $E(X)$.
Soluzione. Notare che $X = -1023$ se perdo 10 volte di seguito, il che avviene con probabilità $\left(\frac{19}{37}\right)^{10}$. Altrimenti, se vinco in uno dei primi 10 tentativi, un facile calcolo mostra che $X = 1$. Il calcolo della media è allora immediato:

$$E(X) = -1023\left(\frac{19}{37}\right)^{10} + \left[1 - \left(\frac{19}{37}\right)^{10}\right] \simeq -0.3.$$

Esercizio 50 Un gioco a premi ha un montepremi di 512$. Vengono poste ad un concorrente 10 domande. Ad ogni risposta errata il montepremi viene dimezzato. Alla prima risposta esatta il concorrente vince il montepremi rimasto. Se non si da alcuna risposta esatta non si vince nulla. Un certo concorrente risponde esattamente ad una domanda con probabilità $p \in (0, 1)$, indipendentemente dalle risposte alle altre domande. Sia X la vincita di questo concorrente.

a. Determinare la densità p_X di X.

b.* Calcolare $E(X)$ (ricordare l'identità $1 + a + \cdots + a^n = (a^{n+1} - 1)/(a - 1)$).

Soluzione. a. La variabile casuale X assume i valori $0, 1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^9$. Per $0 \leq k \leq 9$, il valore 2^{9-k} viene assunto se le prime k risposte sono errate, e la $k+1$-ma è corretta. Ciò avviene con probabilità $(1-p)^k p$. Infine il valore 0 viene assunto se tutte le 10 risposte sono sbagliate, il che avviene con probabilità $(1-p)^{10}$. Riassumendo

$$p_X(2^{9-k}) = p(1-p)^k$$

per $0 \leq k \leq 9$, e $p_X(0) = (1-p)^{10}$.

b. Usando la definizione di valor medio:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{9} 2^{9-k} p(1-p)^k = p2^9 \sum_{k=0}^{9} \left(\frac{1-p}{2}\right)^k$$
$$= p2^9 \frac{1 - \left(\frac{1-p}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1-p}{2}}.$$

Esercizio 51 In un concorso vengono assegnate le idoneità per un dato servizio. Si assuma che ogni partecipante, indipendentemente dagli altri, abbia probabilità $p = \frac{3}{4}$ di ottenere l'idoneità. Al termine del concorso, a 10 tra gli idonei viene assegnato un posto di lavoro (se gli idonei sono meno di 10 vengono assegnati tanti posti di lavoro quanti sono gli idonei). Supponiamo che al concorso partecipino 15 persone, e sia X il numero dei partecipanti che ottengono l'idoneità ma non il posto di lavoro.

a. Determinare la distribuzione di X.

b. Calcolare $E(X)$.

Soluzione. a. Notare che, se $X > 0$, allora X è il numero di idonei meno 10. Allora, se Y è il numero di idonei:

$$P(X = 1) = P(Y = 11) = \binom{15}{11}\left(\frac{3}{4}\right)^{11}\left(\frac{1}{4}\right)^4.$$

Analogamente:

$$P(X=2)=\binom{15}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}$$

$$P(X=3)=\binom{15}{13}\left(\frac{3}{4}\right)^{13}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}$$

$$P(X=4)=\binom{15}{14}\left(\frac{3}{4}\right)^{14}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$P(X=5)=\left(\frac{3}{4}\right)^{15}$$

e, infine, $P(X=0)=1-\sum_{i=1}^{5}P(X=i)$.

b.

$$E(X)=\sum_{i=0}^{5}iP(X=i)\simeq 1.4774.$$

Esercizio 52 Si considerino 5 urne identiche, ognuna contenente una pallina rossa e quattro palline verdi. Ogni urna viene assegnata ad uno di cinque giocatori, e ogni giocatore estrae una pallina dalla propria urna. Un montepremi di 3000 Euro viene diviso tra i giocatori che estraggono la pallina rossa.

a. Sia X il numero di Euro vinti da ogni giocatore vincente ($X=0$ se nessun giocatore estrae la pallina rossa). Determinare la densità e la media di X.

b. Si supponga di considerare uno dei cinque giocatori, chiamiamolo Tizio, e sia Y il numero di Euro vinti da Tizio. Si determinino la densità e la media di Y.

Soluzione. a. Sia $Z=$ numero di giocatori vincenti. Chiaramente $Z\sim B(5,0.2)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(Z=0)=(0.8)^5\\
P(X=3000) &= P(Z=1)=5(0.8)^4(0.2)\\
P(X=1500) &= P(Z=2)=...\\
P(X=1000) &= P(Z=3)=...\\
P(X=750) &= P(Z=4)=...\\
P(X=600) &= P(Z=5)=...
\end{aligned}$$

da cui si calcola

$$E(X)=3000P(X=3000)+1500P(X=1500)+1000P(X=1000)+$$
$$750P(X=750)+600P(X=600)=....$$

b. Si noti che $Y=0$ se Tizio non estrae la pallina rossa, quindi $P(Y=0)=4/5$. Inoltre, per $k=0,1,2,3,4$, si ha che $Y=\frac{3000}{k+1}$ se Tizio ha estratto la pallina rossa, e altri k giocatori hanno estratto la pallina rossa. Si ha, perciò

$$P\left(Y=\frac{3000}{k+1}\right)=\frac{1}{5}\binom{4}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{4-k}.$$

Allora

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{4} \frac{3000}{k+1} \frac{1}{5} \binom{4}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{4-k} = ...$$

Esercizio 53 Si sceglie "a caso" un campione di 5 oggetti da un lotto di 100 di cui 10 sono difettosi per effettuare un controllo di qualità. Sia X il numero di oggetti difettosi contenuti nel campione. Determinare la densità discreta di X.

Soluzione. La variabile X assume solo i valori $0, 1 \ldots, 5$. $X = k$ significa che nel lotto di 5 oggetti k sono difettosi. Possiamo calcolare $\Pr(X = k)$ riconoscendo che X ha una distribuzione ipergeometrica oppure calcolare questa probabilità come casi favorevoli su casi possibili. *Casi possibili*: ci sono $\binom{100}{5}$ modi di scegliere 5 oggetti tra 100. *Casi favorevoli*: devo scegliere 5 oggetti di cui k difettosi. Scelgo prima i k difettosi tra i 10 difettosi in $\binom{10}{k}$ modi, poi scelgo i rimanenti $5-k$ oggetti tra i rimanenti $100-10 = 90$ non difettosi in $\binom{90}{5-k}$ modi. In definitiva i casi favorevoli sono: $\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}$ e quindi:

$$\Pr(X = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 5$$

Facendo un po' di conti si ottiene: $\Pr(X = 0) \simeq 0.583$, $\Pr(X = 1) \simeq 0.340$, $\Pr(X = 2) \simeq 0.070$, $\Pr(X = 3) \simeq 0.007$, $\Pr(X = 4) \simeq \Pr(X = 5) \simeq 0$. Per essere sicuri di non aver sbagliato i conti su può fare la verifica $\sum_{k=0}^{5} \Pr(X = k) = 1$.

Esercizio 54 Si lancia una coppia di dadi non truccati e si sommano i risultati.

1. Si calcoli la probabilità di che occorrano meno di 6 lanci per ottenere almeno un 7.
2. Si calcoli la probabilità di che occorrano più di 6 lanci per ottenere almeno un 7.

Soluzione. La probabilità di ottenere un 7 in un singolo lancio di due dadi si può calcolare come casi favorevoli su casi possibili.

- *Casi possibili:* I risultati possibili per il lancio due dadi, sono $6 \times 6 = 36$.
- *Casi favorevoli:* I casi favorevoli sono 6: $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$.

Quindi

$$\Pr(\text{ottenere un 7 in un singolo lancio}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Sia X il numero di lanci, incluso l'ultimo, necessari per ottenere un 7, è chiaro che X ha una distribuzione geometrica di media 6:

$$\Pr(X = k) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

1.

$$\Pr(X < 6) = \Pr(X \leq 5) = F_X(5) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \simeq 0.598.$$

2. $$\Pr(X>6)=1-\Pr(X\le 6)1-F_X(6)=1-\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^6\right]=\left(\frac{5}{6}\right)^6\simeq 0.335.$$

Esercizio 55 Si estraggono 3 biglie, senza reinserimento, da un'urna contenente 5 biglie rosse, 4 biglie bianche e 2 biglie verdi. Sia X il numero di biglie rosse estratte e Y il numero di biglie bianche estratte.

1. Scrivere la densità (discreta) di (X,Y).
2. Calcolare le densità marginali di X e Y e i valori attesi $E(X)$ ed $E(Y)$.
3. Calcolare la covarianza di X e Y.

Soluzione.

1. Sappiamo che i casi possibili, cioè le terne distinte senza tener conto dell'ordine di estrazione, sono $\binom{11}{3}$. Osservando r biglie rosse, b bianche e v verdi, i casi favorevoli sono:
$$\binom{5}{r}\binom{4}{b}\binom{2}{v}$$
$\Pr(X=i,Y=j)\neq 0$ se e solo se $(i,j)\in\{(i,j):1\le i\le 3,\ 1\le j\le 3,\ 1\le i+j\le 3\}$.
$\Pr(X=0,Y=1)=\frac{\binom{5}{0}\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{11}{3}}=\frac{4}{165}\simeq 0.024;$
$\Pr(X=0,Y=2)=\frac{\binom{5}{0}\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{11}{3}}=\frac{4}{55}\simeq 0.073;$
$\Pr(X=0,Y=3)=\frac{\binom{5}{0}\binom{4}{3}\binom{2}{0}}{\binom{11}{3}}=\frac{4}{165}\simeq 0.024;$
$\Pr(X=1,Y=0)=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{0}\binom{2}{2}}{\binom{11}{3}}=\frac{1}{33}\simeq 0.03;$
$\Pr(X=1,Y=1)=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{11}{3}}=\frac{8}{33}\simeq 0.242$
$\Pr(X=1,Y=2)=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{0}}{\binom{11}{3}}=\frac{2}{11}\simeq 0.182;$
$\Pr(X=2,Y=0)=\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{0}\binom{2}{1}}{\binom{11}{3}}=\frac{4}{33}\simeq 0.121;$
$\Pr(X=2,Y=1)=\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{2}{0}}{\binom{11}{3}}=\frac{8}{33}\simeq 0.242;$
$\Pr(X=3,Y=0)=\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{0}\binom{2}{0}}{\binom{11}{3}}=\frac{2}{33}\simeq 0.061.$

2. Si ha:
$\Pr(X=0)=\Pr(X=0,Y=1)+\Pr(X=0,Y=2)+\Pr(X=0,Y=3)=\frac{4}{33}\simeq 0.121;$
$\Pr(X=1)=\Pr(X=1,Y=0)+\Pr(X=1,Y=1)+\Pr(X=1,Y=2)=\frac{5}{11}\simeq 0.455;$

$\Pr(X=2)=\Pr(X=2,Y=0)+\Pr(X=2,Y=1)=\frac{4}{11}\simeq 0.364$;
$\Pr(X=3)=\Pr(X=3,Y=0)=\frac{2}{33}\simeq 0.061$.
Per gli altri valori i si ha $\Pr(X=i)=0$.
$\Pr(Y=0)=\Pr(X=1,Y=0)+\Pr(X=2,Y=0)=\Pr(X=3,Y=0)=\frac{7}{33}\simeq 0.212$;
$\Pr(Y=1)=\Pr(X=0,Y=1)+\Pr(X=1,Y=1)+\Pr(X=2,Y=1)=\frac{28}{55}\simeq 0.509$;
$\Pr(Y=2)=\Pr(X=0,Y=2)+\Pr(X=1,Y=2)=\frac{14}{55}\simeq 0.255$;
$\Pr(Y=3)=\Pr(X=0,Y=3)=\frac{4}{165}\simeq 0.024$.
Per gli altri valori j si ha $\Pr(Y=j)=0$.
Per i valori attesi si ottiene:

$$E(X)=1\cdot\Pr(X=1)+2\cdot\Pr(X=2)+3\cdot\Pr(X=3)=\frac{15}{11}\simeq 1.364;$$
$$E(Y)=1\cdot\Pr(Y=1)+2\cdot\Pr(Y=2)+3\cdot\Pr(Y=3)=\frac{12}{11}\simeq 1.091.$$

3. XY può assumere solo i valori 0, 1 e 2.

$$\begin{aligned}&E(XY)=\\&=\Pr(X=1,Y=1)+2\left[\Pr(X=1,Y=2)+\Pr(X=2,Y=1)\right]=\\&=\frac{12}{11}\simeq 1.091,\end{aligned}$$

quindi:

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{48}{121}\simeq -0.397.$$

Ne segue che X e Y sono correlate e quindi dipendenti.

Esercizio 56 In un'urna vi sono r palline rosse e v palline verdi. Estraggo in successione due palline, senza reintroduzione. Per $i=1,2$, sia

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{se l'}i\text{-ma pallina è rossa}\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Calcolare il coefficente di correlazione tra X_1 e X_2.
Soluzione. Si noti che

$$p_{X_1.X_2}(1,1)=\frac{r}{r+v}\frac{r-1}{r+v-1},$$

da cui si ha

$$E(X_1X_2)=\sum_{x_1,x_2}x_1x_2p_{X_1.X_2}(x_1,x_2)=p_{X_1.X_2}(1,1)=\frac{r}{r+v}\frac{r-1}{r+v-1}.$$

Inoltre $X_1,X_2\sim Be(r/(r+v))$, da cui

$$Var(X_1)=Var(X_2)=\frac{rv}{(r+v)^2},\ E(X_1)=E(X_2)=\frac{r}{r+v}.$$

A questo punto è sufficiente usare la definizione di coefficiente di correlazione, per trovare

$$\rho_{X,Y}=-1/(r+v-1).$$

Esercizio 57 * Siano X, Y due variabili casuali che ammettono momento secondo, e sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

Si assuma, inoltre, che la matrice A abbia due autovalori distinti, e siano $v = \binom{v_1}{v_2}$, $w = \binom{w_1}{w_2}$ due autovettori linearmente indipendenti di A. Mostrare che le variabili casuali $Z = v_1X + v_2Y$ e $W = w_1X + w_2Y$ sono scorrelate.

Soluzione. Da noti risultati di algebra lineare, v e w sono ortogonali ($w^Tv = 0$). Usando la bilinearità della covarianza:

$$Cov(v_1X + v_2Y, w_1X + w_2Y) = w^TAv = \lambda w^Tv = 0.$$

Esercizio 58 Siano $X, Y \sim Be(p)$ indipendenti, con $p \in (0,1)$. Mostrare che le variabili casuali $X+Y$ e $X-Y$ sono scorrelate ma non indipendenti.
Soluzione.

$$Cov(X+Y, X-Y) = Var(X) - Var(Y) = 0,$$

ma, ad esempio

$$P(X+Y=0, X-Y=1) = 0 \neq P(X+Y=0)P(X-Y=1).$$

Esercizio 59 In un canale di trasmissione vengono trasmessi simboli binari. I disturbi sul canale fanno si che ogni simbolo trasmesso ha la probabilità del 2% di essere ricevuto errato, indipendentemente dagli altri simboli. I messaggi vengono trasmessi in "parole" composte da 50 simboli. Qual è la probabilità che una parola venga ricevuta con almeno due simboli errati? (Usare l'approssimazione di Poisson)
Soluzione. Sia, per $i = 1, \ldots, 50$,

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{se l'}i\text{-mo simbolo é ricevuto correttamente} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Posto $Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$, dobbiamo calcolare $P(Y \geq 2)$. Essendo $X_i \sim Be(0.02)$, allora $Y \sim B(50, 0.02)$. Usando l'approssimazione di Poisson, $Y \approx Po(1)$. Dunque

$$P(Y \geq 2) \simeq 1 - 2e^{-1}.$$

Esercizio 60 Sia X una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$, tale che

$$P(X=k) = \frac{e^{-2}2^k}{2k!}(1+\lambda k),$$

con $\lambda > 0$.

a. Determinare il valore di λ

b. Sia $Y \sim Po(2)$. Mostrare che

$$P(X=k) = \frac{1}{2}[P(Y=k) + P(Y+1=k)].$$

c. Usando il risultato in b., calcolare media e varianza di X

Soluzione. a. Dev'essere

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1.$$

Ma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}2^k}{2k!}(1+\lambda k) = \frac{1}{2}\sum_k e^{-2}\frac{2^k}{k!} + \frac{\lambda}{2}\sum_k ke^{-2}\frac{2^k}{k!} = \frac{1}{2} + \lambda,$$

ove si è usato il fatto che $\sum_k ke^{-2}\frac{2^k}{k!}$ è la media di una variabile di Poisson di parametro 2. Dunque $\lambda = 1/2$.

b. Dal punto a., per $k \geq 1$,

$$P(X = k) = \frac{1}{2}e^{-2}\frac{2^k}{k!} + \frac{1}{4}e^{-2}\frac{2^k}{(k-1)!} = \frac{1}{2}e^{-2}\frac{2^k}{k!} + \frac{1}{2}e^{-2}\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= \frac{1}{2}P(Y = k) + \frac{1}{2}P(Y = k-1).$$

Per $k = 0$ l'identità da dimostrare è banale.

c. Dal punto b.

$$E(X) = \frac{1}{2}\sum_k kP(Y = k) + \frac{1}{2}\sum_k kP(Y + 1 = k) = \frac{1}{2}E(Y) + \frac{1}{2}E(Y + 1) = 1 + 3/2 = 5/2.$$

Analogamente

$$E(X^2) = \frac{1}{2}E(Y^2) + \frac{1}{2}E((Y + 1)^2) = E(Y^2) + E(Y) + 1/2 = 6 + 2 + 1/2 = 17/2.$$

Infine

$$Var(X) = 17/2 - 25/4 = 9/4.$$

Esercizio 61 Sia $\lambda > 0$ e $c : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ una funzione tale che $c(0) = 0$ e $\inf_{n>0} c(n) > \lambda$. Sia X una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$ con densità

$$p_X(n) = \begin{cases} \frac{1}{Z} & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{Z}\frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\cdots c(n)} & \text{se } n \geq 1, \end{cases}$$

dove $Z = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\cdots c(n)}$.

a. Mostrare che $E(c(X)) = \lambda$.

b. Mostrare che per ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che la v.c. $f(X + 1)$ ammette valor medio, si ha

$$E(c(X)f(X)) = \lambda E(f(X + 1)).$$

c.* Si assuma che, per ogni $n \geq 0$, $|c(n+1) - c(n)| \leq 1$. Sia $Y \sim Po(\lambda)$. Mostrare, per induzione su k, che per ogni $k \geq 1$

$$E[c(X)^k] \leq E(Y^k).$$

(Sugg.: usare, dopo averla verificata, l'uguaglianza $E(Y^{k+1}) = \lambda \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} E(Y^i)$)

Soluzione. a.

$$E(c(X)) = \frac{1}{Z}\sum_{n=1}^{+\infty} c(n)\frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\cdots c(n)} = \frac{1}{Z}\left[\lambda + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\cdots c(n-1)}\right]$$
$$= \frac{\lambda}{Z}\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\cdots c(n)}\right] = a.$$

b. Si procede in modo analogo al punto a.

$$E(f(X)c(X)) = \frac{1}{Z}\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)c(n)\frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\cdots c(n)} = \frac{1}{Z}\left[\lambda f(1) + \sum_{n=2}^{+\infty} f(n)\frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\cdots c(n-1)}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{Z}\left[f(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(n+1)\frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\cdots c(n)}\right] = \lambda E(f(X+1)).$$

c. Cominciamo coll'osservare che (vedi esercizio 2.3.4).

$$E[(Y+1)^k] = \lambda \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} E(Y^i).$$

Per il punto b. e il fatto che $c(X+1) \leq c(X)+1$, si ha

$$E[c(X)^{k+1}] = aE[c(X+1)^k] \leq aE\{[c(X)+1]^k\} = a\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}E[c(X)^i] \leq \text{ ipotesi induttiva}$$

$$\leq a\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}E(Y^i) = E(Y^{k+1}).$$

Resta da verificare il passo base dell'induzione ($k=1$). Ma $E(c(X)) = a = E(Y)$.

Esercizio 62 a. Siano $X_1, X_2 \sim Po(\lambda)$ indipendenti. Fissati $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq n$, calcolare

$$P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n). \tag{0.0.0}$$

b. Supponiamo che n sia fissato, e chiamiamo $q(k)$ il valore dell'espressione in (0.0.0). Mostrare che $q(\cdot)$ è il valore della densità di una variabile casuale binomiale, e determinarne i parametri.

c. Siano ora $X_1, X_2, \ldots, X_m \sim Po(\lambda)$ indipendenti, con $m > 2$. Calcolare

$$q_m(k) = P(X_1 = k | X_1 + X_2 + \cdots + X_m = n),$$

e determinare i parametri della variabile casuale binomiale la cui densità è $q_m(\cdot)$.

Soluzione. a. e b.

$$P(X_1 = k|X_1+X_2 = n) = \frac{P(X_1 = k, X_1+X_2 = n)}{P(X_1+X_2 = n)} = \frac{P(X_1 = k, X_2 = n-k)}{P(X_1+X_2 = n)}$$

$$= \frac{P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)}{P(X_1+X_2 = n)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^n}{n!}} = \binom{n}{k}2^{-n},$$

dove abbiamo usato l'indipendenza di X_1 e X_2 e il fatto che $X_1 + X_2 \sim Po(2\lambda)$. Si noti che il valore ottenuto è la densità di una v.c. $B(n, 1/2)$.

c. In modo analogo al punto precedente, usando il fatto che $X_2 + \cdots + X_m \sim Po((m-1)\lambda)$,

$$P(X_1 = k|X_1+X_2+\cdots+X_m = n) = \frac{P(X_1 = k)P(X_2+\cdots+X_m = n-k)}{P(X_1+\cdots+X_m = n)}$$

$$= \binom{n}{k}\frac{1}{m^k}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k},$$

che è la densità di una $B(n, 1/m)$.

Esercizio 63 Siano X, Z e W variabili casuali indipendenti con $X \sim Be(p)$, $Z, W \sim Po(\lambda)$. Definiamo

$$Y = XZ + W.$$

a. Determinare le densità $p_{X,Y}$ e p_Y.

b. Utilizzando la densità calcolata al punto a., determinare $E(Y)$ e $Var(Y)$.

c. Calcolare $E(Y)$ e $Var(Y)$ *senza* utilizzare p_Y.

Soluzione. a. Si ha

$$p_{X,Y}(0,y) = P(X=0, Y=y) = P(X=0, W=y) = P(X=0)P(W=y) = (1-p)e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!},$$

$$p_{X,Y}(1,y) = P(X=1, Y=y) = P(X=1, Z+W=y) = pe^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^y}{y!},$$

ove si è usato il fatto che X, Z, W sono indipendenti e che $Z + W \sim Po(2\lambda)$. Segue che

$$p_Y(y) = p_{X,Y}(0,y) + p_{X,Y}(1,y) = (1-p)e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} + pe^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^y}{y!}.$$

b.

$$\begin{aligned} E(Y) &= (1-p)\sum_{y=0}^{+\infty} ye^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} + p\sum_{y=0}^{+\infty} ye^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^y}{y!} \\ &= (1-p)\lambda + 2\lambda p = \lambda(p+1), \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che le due somme nella formula precedente coincidono con le medie di v.c. di Poisson di parametri λ e 2λ rispettivamente. Un analogo ragionamento con i momenti secondi conduce a

$$E(Y^2) = (1-p)(\lambda^2 + \lambda) + p(4\lambda^2 + 2\lambda) = \lambda^2(1+3p) + \lambda(1+p).$$

Perciò

$$Var(Y) = \lambda^2(p - p^2) - \lambda(1+p).$$

c. Usando il fatto che la media del prodotto di due v.c. indipendenti è uguale al prodotto dei valori medi, si ha

$$E(Y) = E(XZ) + E(W) = E(X)E(Z) + E(W) = p\lambda + \lambda = \lambda(p+1)$$

e

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= E(X^2Z^2) + E(W^2) + 2E(XZW) = E(X^2)E(Z^2) + E(W^2) + 2E(X)E(Z)E(W) \\ &= p(\lambda^2 + \lambda) + \lambda^2 + \lambda + 2p\lambda^2 = \lambda^2(1+3p) + \lambda(1+p), \end{aligned}$$

e si ritrova quanto trovato sopra.

Esercizio 64 Siano X e Y due variabili casuali a valori in $\mathbb{N}$ aventi la seguente densita‘ congiunta:

$$P(X=k, Y=n) = \begin{cases} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} & \text{se } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $p \in (0,1)$ e $\lambda > 0$ sono due parametri fissati.

a. Determinare le densita‘ marginali di X e Y. Mostrare, in particolare, che $X \sim Po(p\lambda)$ e $Y \sim Po(\lambda)$.

b. Calcolare il coefficente di correlazione $\rho_{X,Y}$.

Soluzione. a.

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{\lambda^k p^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$= \frac{\lambda^k p^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n (1-p)^n}{n!} = \frac{\lambda^k p^k}{k!} e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!}.$$

$$P(Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

b. Dal punto a. abbiamo che $Var(X) = p\lambda$ e $Var(Y) = \lambda$. Inoltre

$$E(XY) = \sum_{k,n} knP(X=k, Y=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Osservando che $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ è la media di una $B(n,p)$, abbiamo

$$E(XY) = p \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = p(\lambda + \lambda^2),$$

dove abbiamo usato il fatto che $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = p(\lambda+\lambda^2)$ è il momento secondo di una $Po(\lambda)$. Ne segue che

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = p(\lambda+\lambda^2) - p\lambda^2 = p\lambda.$$

Infine

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{p\lambda}{\sqrt{p\lambda^2}} = \sqrt{p}.$$

Esercizio 65 Un’urna contiene 100 palline numerate da 0 a 99. Si estrae una pallina, e si denotano con X e Y le due cifre del numero estratto (la cifra delle decine, X, si considera uguale a zero per numeri minori di 10). Mostrare che X e Y sono indipendenti, e determinarne la distribuzione.

Soluzione. Sia Z il valore del numero estratto. Chiaramente $P(Z=i) = \frac{1}{100}$ per $i = 0, 1, \ldots, 99$. X e Y assumono valori interi tra 0 e 9. Per $n, m \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ si ha

$$P(X=n, Y=m) = P(Z = 10n+m) = \frac{1}{100},$$

$$P(X=n) = P(10n \le Z \le 10n+9) = \frac{1}{10},$$

$$P(Y=m) = P(Z \in \{m, m+10, m+20, \ldots, m+90\}) = \frac{1}{10},$$

da cui segue l’indipendenza.

Esercizio 66 Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) Gli eventi A e B sono indipendenti.

ii) Le variabili casuali 1_A e 1_B sono indipendenti.

iii) Le variabili casuali 1_A e 1_B sono scorrelate (cioe‘ $Cov(1_A, 1_B) = 0$).

Soluzione.

i) $\Rightarrow$ ii) Dimostriamo che la densita‘ congiunta e‘ il prodotto delle densita‘ marginali.

$$P(1_A = 1, 1_B = 1) = P(A \cap B) = (\text{ per l'indipendenza })$$

$$= P(A)P(B) = P(1_A = 1)P(1_B = 1).$$

Analogamente:

$$P(1_A = 0, 1_B = 1) = P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B) = P(1_A = 0)P(1_B = 1),$$

e allo stesso modo negli altri casi.

ii) $\Rightarrow$ iii) E‘ una proprieta‘ generale.

iii) $\Rightarrow$ i) Si noti che

$$E(1_A 1_B) = E(1_{A\cap B}) = P(A \cap B),$$

e

$$E(1_A)E(1_B) = P(A)P(B).$$

Sicche':

$$0 = Cov(1_A, 1_B) = E(1_A 1_B) - E(1_A)E(1_B) = P(A \cap B) - P(A)P(B),$$

da cui segue la conclusione.

Esercizio 67 Siano $X \sim Ge(p)$ e $Y \sim Ge(q)$, Determinare la densità di $Z = \min(X, Y)$.

Soluzione. Si procede esattamente come nell'Esempio 2.8.2:

$$F_Z(k) = 1 - [(1-p)(1-q)]^k,$$

da cui $Z \sim Ge(1 - [(1-p)(1-q)])$.