Traccia della soluzione degli esercizi del Capitolo 3

Esercizio 68 Sia X una v.c. uniformenente distribuita nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cioè

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} 1_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(x).$$

Posto $Y = \cos(X)$, trovare la distribuzione di Y.
Soluzione.

$$F_Y(y) = P(\cos(X) \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ P(\arccos(y) \leq |X| \leq \pi/2) & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

Tenendo conto che $P(\arccos(y) \leq |X| \leq \pi/2) = 2P(\arccos(y) \leq X \leq \pi/2) = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos(y)$ per $0 \leq y \leq 1$, derivando si trova

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} 1_{(0,1)}(y).$$

Esercizio 69 Si scelga a caso un punto X dell'intervallo $[0, 2]$, con distribuzione uniforme di densità

$$f_X(x) = \frac{1}{2} 1_{[0,2]}(x)$$

(in altre parole, X è una v.c. con densità f_X). Qual è la probabilità che il triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza X abbia area maggiore di 1?
Soluzione. Se A è l'area del triangolo, si ha

$$A = X^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Perciò

$$P(A > 1) = P(X > 2/3^{1/4}) = 1 - 3^{-1/4}.$$

Esercizio 70 * Si scelga a caso un angolo $\Theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ con distribuzione uniforme di densità

$$f_\Theta(\theta) = \frac{2}{\pi} 1_{(0,\frac{\pi}{2})}(\theta),$$

e si consideri il punto del piano di coordinate $(\cos(\Theta), \sin(\Theta))$. Per tale punto si tracci la tangente alla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1, e sia L la lunghezza del segmento i cui estremi sono i punti d'intersezione di tale tangente con gli assi cartesiani. Determinare la distribuzione di L.
Soluzione. Si noti che $L = \tan(\Theta) + \frac{1}{\tan(\Theta)}$ (in particolare $L \geq 2$). Inoltre, posto $t = \tan(\Theta) > 0$, per $x \geq 2$

$$L \leq x \iff t^2 - xt + 1 \leq 0 \iff \frac{x - \sqrt{x^2-4}}{2} < t \leq \frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2}.$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
F_L(x) &= 1_{[2,+\infty)}(x) P\left[\Theta \in \left[\arctan\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right), \arctan\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)\right]\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)\right] 1_{[2,+\infty)}(x).
\end{aligned}
$$

Esercizio 71 Sia $X \sim U(-1,1)$, e $Y = \frac{1}{1-X^2}$. Determinare la distribuzione di Y.
Soluzione. Notare che $F_Y(y) = 0$ se $y \leq 1$. Se $y > 1$

$$
F_Y(y) = P\left(\frac{1}{1-X^2} \leq y\right).
$$

Ma

$$
\frac{1}{1-X^2} \leq y \iff 1 - X^2 \geq \frac{1}{y} \iff |X| \leq \sqrt{1-\frac{1}{y}}.
$$

Perciò

$$
F_Y(y) = P\left(|X| \leq \sqrt{1-\frac{1}{y}}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{y}}.
$$

Esercizio 72 * Sia X una variabile casuale scalare assolutamente continua, che ammette valor medio e tale che $P(X > 0) = 1$. Tramite un'opportuna integrazione per parti mostrare che

$$
E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t)dt.
$$

Soluzione. Notando che $P(X > t) = 1 - F_X(t)$, integrando per parti si trova che, per $x > 0$,

$$
\int_0^x P(X > t)dt = xP(X > x) + \int_0^x t f_X(t)dt.
$$

È dunque sufficiente dimostrare che

$$
\lim_{x \to +\infty} xP(X > x) = 0. \quad (\bullet)
$$

Per far ciò, si noti che poiché X ammette valor medio

$$
\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} t f_X(t)dt = 0.
$$

Ma essendo $t \geq x$ per $t \in [x, +\infty)$, ne segue che

$$
\int_x^{+\infty} t f_X(t)dt \geq x \int_x^{+\infty} f_X(t)dt = xP(X > x),
$$

e quindi $(\bullet)$ segue.

Esercizio 73 Siano $X_1, X_2, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$ indipendenti, e

$$Y = \max(X_1, \dots, X_n), \quad Z = \min(X_1, \dots, X_n).$$

Determinare la distribuzione di Y e Z.
Soluzione. Basta usare la Proposizione 2.8.9 delle dispense, e si trova $F_Y(x) = (1 - e^{-\lambda t})^n$, $Z \sim Exp(n\lambda)$.

Esercizio 74 Siano $X, Y \sim N(0,1)$ indipendenti.

a. Determinare la densità congiunta di $(X+Y, X-Y)$, e mostrare che esse sono indipendenti. Inoltre calcolare le densità marginali di $X+Y$ e $X-Y$.
Soluzione. Posto $Z = X+Y$, $W = X-Y$, si ha

$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\det(A) = -2$ e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

per la formula di trasformazione di variabili assolutamente continue si ha

$$f_{Z,W}(z,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}(z+w)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}(z-w)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}z^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}w^2},$$

da cui segue che .$X+Y$ e $X-Y$ sono indipendenti, e $X-Y$ e $X+Y \sim N(0,2)$.

Esercizio 75 Siano X e Y due variabili casuali scalari, assolutamente continue e indipendenti, con densità f_X e f_Y rispettivamente.

a. Mostrare che, posto $Z = X - Y$,

$$f_Z(z) = \int f_X(x+z) f_Y(x) dx.$$

b. Usando la formula nel punto a., determinare f_Z nel caso in cui $X \sim Exp(1)$ e $Y \sim Exp(1)$.
Soluzione. a. Posto $W = -Y$, passando per la funzione di ripartizione si ha che $f_W(x) = f_Y(-x)$ $\forall x$. Inoltre X e W sono indipendenti. Allora, per la formula di pag. 71,

$$f_{X-Y}(z) = f_{X+W}(z) = \int f_X(\xi) f_W(z-\xi) d\xi = \int f_X(\xi) f_Y(\xi - z) d\xi = \int f_X(x+z) f_Y(x) dx,$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato il cambio di variabile $x = \xi - z$.

b.

$$f_Z(z) = \int e^{-(x+z)} 1_{[0,+\infty)}(x+z) e^{-x} 1_{[0,+\infty)}(x) dx = e^{-z} \int_{\max(0,-z)}^{+\infty} e^{-2x} dx$$

$$= e^{-z} \frac{1}{2} e^{-2\max(0,-z)} = \frac{1}{2} e^{-|z|},$$

dove abbiamo usato il fatto che $z + 2\max(0,-z) = |z|$.

Esercizio 76 Siano $X \sim Exp(1)$ e $Y \sim Exp(2)$ indipendenti.

a. Scrivere la densità congiunta del vettore (X, Y).

b. Sia T_t il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,t)$ e (t,t), dove $t > 0$. Calcolare $P((X,Y) \in T_t)$.

c. Calcolare $P(X \le Y)$.

Soluzione. a. Basta ricordare che $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, e si ottiene

$$f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-(x+2y)} 1_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)}(x,y).$$

b.

$$\begin{aligned} P((X,Y) \in T_t) &= \int_{T_t} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 2\int_0^t e^{-2y}\left[\int_0^y e^{-x}dx\right] dy \\ &= 2\int_0^t e^{-2y}\left[1 - e^{-y}\right] dy = \frac{1}{3} - e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-3t}. \end{aligned}$$

c. Posto $T = \{(x,y) : x \le y\}$, si ha

$$P(X \le Y) = P((X,Y) \in T) = 2\int_0^{+\infty} e^{-2y}\left[\int_0^y e^{-x}dx\right] dy = \cdots = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 77 Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$. Sia (X,Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = -4\log(y) 1_T(x,y).$$

a. Determinare le densità marginali di X e Y.

b. Calcolare, se esistono, media e varianza di Y.

Soluzione. a.

$$f_X(x) = 1_{[0,1]}(x)\int_x^1 (-4\log(y))dy = 4 1_{[0,1]}(x)[1 - x + x\log(x)].$$

$$f_Y(y) = 1_{[0,1]}(y)(-4\log(y))\int_0^y dx = 1_{[0,1]}(y)(-4y\log(y)).$$

b.

$$E(Y) = -4\int_0^1 y^2\log(y)dy = -\frac{4}{3}y^3\log(y)\Big|_0^1 + \frac{4}{3}\int_0^1 y^2 dy = \frac{4}{9}.$$

$$E(Y^2) = -4\int_0^1 y^3\log(y)dy = -y^4\log(y)\Big|_0^1 + \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{4},$$

da cui $Var(Y) = \frac{1}{4} - \frac{16}{81} = \frac{17}{324}$.

Esercizio 78 * Sia X una variabile casuale scalare assolutamente continua con densità f_X, e sia Y una variabile casuale scalare discreta di densità p_Y. Supponiamo che Y assuma solo un numero finito di valori, cioè l'insieme $\{x : p_Y(x) > 0\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ è finito, e che X e Y siano indipendenti.

a. Esprimere la funzione di ripartizione di $X+Y$ in termini di f_X e p_Y.

b. Mostrare che $X+Y$ è una variabile casuale assolutamente continua, e determinarne la densità in funzione di f_X e p_Y.

Soluzione. 3.6.10 a. Sia $\{y_1, \ldots, y_n\}$ l'insieme dei valori assunti da Y.

$$P(X+Y \leq t) = \sum_{k=1}^{n} P(X \leq t - x_k, Y = x_k) = sum_k p_Y(x_k) \int_{-\infty}^{t-x_k} f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \sum_k f_X(x - x_k) p_Y(x_k) dx.$$

b. Dall'ultima espressione ottenuta segue immediatamente che

$$f_{X+Y}(x) = \sum_k f_X(x - x_k) p_Y(x_k)$$

Esercizio 79 Sia (X, Y) un vettore aleatorio di dimensione 2 con densità uniforme

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{2}{\pi} 1_\Gamma(x,y),$$

dove $\Gamma = \{(x,y) : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a. Determinare le densità marginali di X e Y.

b. Calcolare $Cov(X,Y)$

Soluzione. a.

$$f_X(x) = 1_{[0,1]}(x) \frac{2}{\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{4\sqrt{1-x^2}}{\pi} 1_{[0,1]}(x).$$

Analogo il calcolo di f_Y.

b. Poiché f_X e f_Y sono funzioni pari, $E(X) = E(Y) = 0$. Allora

$$Cov(X,Y) = E(XY) = \int xy f_{X,Y}(xy) dx dy = \int_{-1}^{1} x \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right] dx = 0.$$

Esercizio 80 * Siano $X \sim N(0,1)$ e $T \sim Exp(1/2)$ indipendenti. Si definiscano $Y = X/\sqrt{T}$ e $S = X^2 + T$.

a. Determinare la densità congiunta di (Y, S).

b. Y e S sono variabili casuali indipendenti? (Motivare la risposta!)

Soluzione. a. Posto $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, si consideri la trasformazione $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ data da

$$\Phi(x,t) = \left(\frac{x}{\sqrt{t}}, \frac{s}{1+y^2} \right).$$

Si tratta di un diffeomorfismo, il cui inverso é dato da

$$\Phi^{-1}(y,s) = \left(y\sqrt{\frac{s}{1+y^2}}, \frac{s}{1+y^2}\right).$$

La matrice Jacobiana di Φ^{-1} é

$$D\Phi^{-1}(y,s) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{s}{1+y^2}} - \frac{y^2\sqrt{s}}{(1+y^2)^{3/2}} & -\frac{y}{2\sqrt{s}\sqrt{1+y^2}} \\ -\frac{2ys}{(1+y^2)^2} & \frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix}$$

sicché

$$\det D\Phi^{-1}(y,s) = \frac{\sqrt{s}}{(1+y^2)^{3/2}}.$$

Da una nota formula si ha

$$\begin{aligned} f_{Y,S}(y,s) &= f_{X,Y}(\Phi^{-1}(y,s)) \det D\Phi^{-1}(y,s) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-s/2} \frac{\sqrt{s}}{(1+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

b. Sí, in quanto $f_{Y,S}(y,s)$ si fattorizza nelle variabili y, s.

Esercizio 81 Sia X una variabile casuale la cui funzione di ripartizione è

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ x/2 & \text{per } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{per } x \ge 1 \end{cases}$$

Sia inoltre $Y \sim U(0,1)$ indipendente da X, e si definisca

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{se } X(\omega) < 1 \\ Y(\omega) & \text{se } X(\omega) = 1 \end{cases}$$

Determinare la distribuzione di Z (sugg: determinare la funzione di ripartizione di Z).
Soluzione. Sia $t \in [0,1)$.

$$P(Z \le t) = P(X \le t) + P(Y \le t, X = 1) = \frac{t}{2} + P(Y \le t)P(X = 1) = \frac{t}{2} + t\frac{1}{2} = t,$$

da cui si deduce che $Z \sim U(0,1)$.

Esercizio 82 Un congegno elettronico è costituito da n componenti collegate in serie: esso smette di funzionare non appena una qualsiasi delle sue componenti smette di funzionare. Siano $T_1, T_2, \ldots, T_n$ i tempi di vita delle n componenti, che si assumono indipendenti e identicamente distribuiti con distribuzione esponenziale di parametro 1. Sia X_n il tempo di vita dell'intero dispositivo.

a. Determinare la distribuzione di X_n.

b. Mostrare che, per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n > \epsilon) = 0$$

Soluzione. a. Essendo $X_n = \min(T_1, T_2, \ldots, T_n)$, basta usare l'esercizio 73.

b. Dal punto a. $P(X_n > \epsilon) = e^{-n\epsilon}$.

Esercizio 83 * Siano $Y \sim U(-\pi/2, \pi/2)$ e X una variabile casuale assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} 1_{[0,+\infty)}(x).$$

Si assuma che X e Y siano indipendenti. Definite

$$\begin{array}{rcl} Z & = & X \cos Y \\ W & = & X \sin Y \end{array}$$

determinare la distribuzione congiunta e le distribuzioni marginali di (Z, W).(Sugg: osservare che $X = \sqrt{Z^2 + W^2}$ e $Y = \arctan(W/Z)$).

Soluzione. Sia $F(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$. Si noti che F mappa $(0, +\infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$ in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Si ha $F^{-1}(z, w) = (\sqrt{z^2 + w^2}, \arctan(w/z))$. Perciò

$$DF^{-1}(z, w) = \begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{z^2+w^2}} & -\frac{w}{z^2} \frac{1}{1+(w/z)^2} \\ \frac{w}{\sqrt{z^2+w^2}} & \frac{1}{z} \frac{1}{1+(w/z)^2} \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det DF^{-1}(z, w) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + w^2}}.$$

Segue che

$$f_{Z,W}(z, w) = f_{X,Y}(F^{-1}(z, w)) |\det DF^{-1}(z, w)| = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(z^2+w^2)} 1_{(0,+\infty)}(z).$$

Da ciò deriva che Z e W sono indipendenti, $W \sim N(0, 1)$ e Z ha densità

$$f_Z(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2} 1_{(0,+\infty)}(z).$$

Esercizio 84 Sia X una variabile casuale scalare assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = -\log(x) 1_{(0,1)}(x).$$

a. Determinare la funzione di ripartizione di X.

b. Sia $Y = -\log X$. Determinare la distribuzione di Y. In particolare, mostrare che Y è una variabile Gamma, e determinarne i parametri.

Soluzione. a. $F_X(x) = 0$ per $x \leq 0$, $F_X(x) = 1$ per $x > 1$, e, per $0 < x \leq 1$:

$$F_X(x) = -\int_0^x \log(t) dt = x - x \log(x).$$

b. Si noti che $-\log X$ assume valori positivi. Allora, per $t \geq 0$:

$$P(Y \leq t) = P(X \geq e^{-t}) = 1 - F_X(e^{-t}) = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

Derivando rispetto a t si ottiene

$$f_Y(x) = xe^{-x} 1_{(0,+\infty)}(x),$$

da cui $Y \sim \Gamma(2, 1)$.

Esercizio 85 L'ufficio informazioni delle Ferrovie dello Stato ha due numeri verdi. Il tempo di attesa T_i, $i = 1, 2$ per parlare con l'operatore è, per entrambi i numeri, una variabile casuale esponenziale di media $\mu = 15$ minuti. Inoltre T_1 e T_2 si possono considerare indipendenti. Avendo a disposizione due telefoni, decido di chiamare contemporaneamente i due numeri, in modo da parlare con l'operatore che per primo risponderà.

a. Quanto tempo, in media, dovrò aspettare per parlare con un operatore?

b. Qual è la probabilità di attendere meno di 5 minuti?

Soluzione. a. Si noti che $T_i \sim Exp(1/15)$. Il tempo di attesa per la risposta è $T = \min(T_1, T_2) \sim Exp(2/15)$, da cui segue che $E(T) = 15/2$.

b.
$$P(T \leq 5) = 1 - e^{-\frac{2}{15}5} = 1 - e^{2/3}.$$

Esercizio 86 * Sia X una variabile casuale scalare, e sia F_X la sua funzione di ripartizione.

a. Supponendo che F_X sia invertibile (e perciò anche continua), determinare la distribuzione della variabile casuale $Y = F_X(X)$.

b*. Mostrare che il risultato al punto a. vale anche assumendo solo la continuità di F_X.

c. Mostrare, con un controesempio, che invece il risultato al punto a. può essere falso so F_X non è continua.

d. Mostrare che il risultato al punto a. è *sicuramente* falso se F_X è discontinua (pensare al supporto della distribuzione di Y).

Soluzione. a. Notare che $Y \in [0, 1]$, e quindi $F_Y(t) = 0$ per $t \leq 0$ e $F_Y(t) = 1$ per $t \geq 1$. Inoltre, per $t \in (0, 1)$:
$$F_Y(t) = P(F_X(X) \leq t) = P(X \leq F_X^{-1}(t)) = F_X(F_X^{-1}(t)) = t,$$
dove si è usato il fatto che F_X^{-1} è crescente. Ne segue che $Y \sim U(0, 1)$.

b. Poichè F_X è crescente e continua, l'antiimmagine $F_X^{-1}((-\infty, t])$, per $t \in (0, 1)$, è una semiretta inferiormente illimitata e chiusa, cioè
$$F_X^{-1}((-\infty, t]) = (-\infty, \xi_t],$$
dove ξ_t è il più grande valore di x per cui $F_Z(x) = t$. Ma allora
$$F_Y(t) = P(F_X(X) \leq t) = P(X \leq F_X^{-1}((-\infty, t]) = P(X \leq \xi_t) = F_X(\xi_t) = t,$$
che è lo stesso risultato trovato al punto a.

c. d. Sia $x \in \mathbb{R}$ un punto di discontinuità di F_X, cioè $F_X(x) > F_X(x^-)$. Allora, usando il fatto che F_X è crescente, si vede che $(F_X(x^-), F_X(x)) \not\subset F_X(\mathbb{R})$. In particolare $P(Y \in (F_X(x^-), F_X(x))) = 0$, mentre, se fosse $Y \sim U(0, 1)$, si avrebbe $P(Y \in (F_X(x^-), F_X(x))) = F_X(x) - F_X(x^-)$.

Esercizio 87 Sia (X, Y) una vettore aleatorio assolutamente continuo con densità congiunta
$$f_{X,Y}(x, y) = 3x 1_{(0,x)}(y) 1_{(0,1)}(x).$$

a. Trovare le densità marginali f_X e f_Y.

b. Usando un opportuno cambiamento di variabili, determinare la densità della variabile casuale $Z = X - Y$.

Soluzione. a.

$$f_X(x) = 1_{(0,1)}(x) \int_0^x 3x dy = 3x^2 1_{(0,1)}(x).$$

$$f_Y(y) = 1_{(0,1)}(y) \int_y^1 3x dx = \frac{3}{2}(1 - y^2) 1_{(0,1)}(y).$$

b. Ulilizzando formule viste a lezione o un cambiamento di variabili, si trova:

$$f_Z(z) = \int f_{X,Y}(z + w, w) dw = \int 3(z + w) 1_{(0,z+w)}(w) 1_{(0,1)}(z + w).$$

Notando che

$$1_{(0,z+w)}(w) 1_{(0,1)}(z + w) = 1_{(0,1)}(z) 1_{(0,1-z)}(w),$$

otteniamo

$$f_Z(z) = 1_{(0,1)}(z) \int_0^{1-z} (z + w) dw = \frac{3}{2}(1 - z^2) 1_{(0,1)}(z).$$

Esercizio 88 Siano $X \sim Exp(1)$ e $Y \sim Exp(1/2)$ variabili casuali indipendenti. Determinare la densità di $X + Y$.

Soluzione.

$$f_{X+Y}(z) = \int f_X(z - x) f_Y(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^z e^{-(z-x)} e^{-x/2} dx 1_{[0,+\infty)}(z)$$

$$= 1_{[0,+\infty)}(z) \frac{1}{2} e^{-z} \int_0^z e^{x/2} dx = e^{-z}(e^{z/2} - 1) 1_{[0,+\infty)}(z).$$

Esercizio 89 Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = 2e^{-(x+y)} 1_A(x, y),$$

dove $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x\}$.

a. X e Y sono indipendenti? (Giustificare la risposta!)

b. Determinare le densità marginali f_X e f_Y.

c. Calcolare $E\left[(X - Y)^2\right]$

Soluzione. No, in quanto $f_{X,Y}(x, y)$ non si può fattorizzare nella forma $\varphi(x)\psi(y)$.

b.

$$f_X(x) = 2e^{-x} \int_0^x e^{-y} dy 1_{(0,+\infty)}(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-x}) 1_{(0,+\infty)}(x).$$

$$f_X(y) = 2e^{-y} \int_y^{+\infty} e^{-x} dx 1_{(0,+\infty)}(y) = 2e^{-2y} 1_{(0,+\infty)}(y).$$

c.

$$E[(X - Y)^2] = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY).$$

Inoltre

$$E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx - 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}dx =$$

$$= \text{(dopo due integrazioni per parti)} = \frac{7}{2}$$

$$E(Y^2) = 2\int_0^{+\infty} y^2 e^{-2y}dy = \text{(dopo due integrazioni per parti)} = \frac{1}{2}.$$

$$E(XY) = \int xyf_{X,Y}(x,y)dxdy = 2\int_0^{+\infty} ye^{-y}\left[\int_y^{+\infty} xe^{-x}dx\right]dy$$

$$= 2\int_0^{+\infty} ye^{-y}\left[ye^{-y} + \int_y^{+\infty} e^{-x}dx\right]dy$$

$$= 2\int_0^{+\infty} y^2 e^{-2y}dy + 2\int_0^{+\infty} ye^{-2y}dy = 1.$$

Ne segue che

$$E[(X-Y)^2] = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} - 2 = 2.$$

Esercizio 90 Sia Y un numero casuale con distribuzione uniforme in $[0,1]$. Supponiamo di volere, dopo aver generato Y, generare un nuovo numero casuale W scelto con distribuzione uniforme tra Y e 1. Per fare cio‘, generiamo un numero casuale $X \sim U(0,1)$ indipendente da Y, e poniamo

$$W = XY + 1 - X.$$

a. Determinare la densita‘ congiunta di (Y,W).

b. Determinare la densita‘ di W.

c*. Calcolare il coefficente di correlazione $\rho_{Y,W}$.

Soluzione. a. Si scriva

$$(Y,W) = \varphi(Y,X),$$

dove

$$\varphi(y,x) = (y, xy + 1 - x).$$

Si vede che

$$\varphi^{-1}(y,w) = \left(y, \frac{1-w}{1-y}\right).$$

Essendo

$$\left|\det D\varphi^{-1}(y,w)\right| = \frac{1}{|1-y|},$$

si ha

$$f_{Y,W}(y,w) = f_{Y,X}(\varphi^{-1}(y,w))\left|\det D\varphi^{-1}(y,w)\right|$$

$$= 1_{[0,1]}(y)1_{[0,1]}\left(\frac{1-w}{1-y}\right)\frac{1}{1-y} = 1_{[0,1]}(y)\frac{1}{1-y}1_{[y,1]}(w).$$

b.

$$f_W(w) = \int f_{Y,W}(y,w)dy = 1_{[0,1]}(w)\int_0^w \frac{1}{1-y}dy = -\log(1-w)1_{[0,1]}(w).$$

c. Anzitutto

$$E(YW) = \int ywf_{Y,W}(y,w)dydw = \int_0^1 \left(\int_y^1 wdw \right) \frac{y}{1-y} dy = ... = \frac{5}{12}.$$

Per calcolare $E(W)$ usiamo ancora la densita‘ congiunta invece della marginale f_W (i calcoli sono un po’ piu‘ semplici):

$$E(W) = \int wf_{Y,W}(y,w)dydw = \int_0^1 \left(\int_y^1 wdw \right) \frac{1}{1-y} dy = ... = \frac{3}{4}.$$

Infine, sappiamo che $E(Y) = \frac{1}{2}$. Percio‘

$$Cov(Y,W) = E(YW) - E(Y)E(W) = \frac{1}{24}.$$

Inoltre

$$E(W^2) = \int w^2 f_{Y,W}(y,w)dydw = \int_0^1 \left(\int_y^1 w^2dw \right) \frac{1}{1-y} dy = ... = \frac{11}{18}.$$

Da cio‘

$$Var(W) = E(W^2) - [E(W)]^2 = \frac{7}{144}.$$

Essendo $Var(Y) = \frac{1}{12}$, si conclude che

$$\rho_{Y,W} = \frac{Cov(Y,W)}{\sqrt{Var(Y)Var(W)}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Esercizio 91 Siano $X, Y \sim U(0,1)$ indipendenti.

a. Determinare la densità congiunta di $\left(\frac{X}{Y}, Y\right)$.

b. Determinare la densità di $\frac{X}{Y}$.

Soluzione. a. Si consideri la trasformazione $(x,y) \mapsto (x/y, y)$, che è un diffeomorfismo tra $(0,1) \times (0,1)$ e $(0,+\infty) \times (0,1)$. La trasformazione inversa è $(w,z) \mapsto (wz, z)$, la cui matrice Jacobiana è

$$\begin{pmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è z. Posto allora $W = X/Y$, $Z = Y$, dalla formula di trasformazione per vettori assolutamente continui, si ha

$$f_{W,Z}(w,z) = z1_{(0,1)}(wz)1_{(0,1)}(z).$$

b. Dobbiamo trovare la densità marginale di W, e quindi dobbiamo integrare $f_{W,Z}$ rispetto a z. Notare che

$$1_{(0,1)}(wz)1_{(0,1)}(z) = \begin{cases} 1_{(0,1)}(z) & \text{se } 0 < w \leq 1 \\ 1_{(0,1/w)}(z) & \text{se } w > 1. \end{cases}$$

Allora

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{se } w < 0 \\ \int_0^1 zdz = \frac{1}{2} & \text{se } 0 < w \leq 1 \\ \int_0^{1/w} zdz = \frac{1}{2w^2} & \text{se } w > 1. \end{cases}$$