

Traccia della soluzione degli esercizi del Capitolo 4

Esercizio 92 Vengono generati n numeri casuali tra 0 e 1, con distribuzione uniforme. Quanti numeri è necessario generare affinché la probabilità che la somma di essi sia compresa tra $0.49n$ e $0.51n$ sia maggiore o uguale a 0.99?

Soluzione. La probabilità in esame si può riscrivere nella forma

$$P(0.49 \leq \bar{X}_n \leq 0.51) = P\left(-\frac{0.01}{\sqrt{1/12}}\sqrt{n} \leq Z_n \leq \frac{0.01}{\sqrt{1/12}}\sqrt{n}\right) \simeq 2\Phi(0.01\sqrt{12n}) - 1.$$

Dobbiamo allora risolvere:

$$\simeq 2\Phi(0.01\sqrt{12n}) - 1 \geq 0.99$$

cioè

$$\Phi(0.01\sqrt{12n}) \geq 0.995 \Leftrightarrow 0.01\sqrt{12n} \geq \Phi^{-1}(0.995) \simeq 2.58,$$

da cui si trova $n \geq 5547$.

Esercizio 93 Un venditore porta a porta deve vendere 10 copie di un libro. Se ogni singolo cliente acquista il libro con probabilità 0.1, quanti clienti deve visitare il venditore affinché la probabilità di vendere tutti e dieci i libri sia almeno 0.99?

Soluzione. Poste $X_1, \dots, X_n \sim Be(0, 1)$ indipendenti, la probabilità in esame si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 10\right) &= P\left(\bar{X}_n \geq \frac{10}{n}\right) = P\left(Z_n \geq \frac{\frac{10}{n} - 0.1}{\sqrt{0.1 \cdot 0.9}}\sqrt{n}\right) \\ &\simeq 1 - \Phi\left(\frac{\frac{10}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{10}}{0.3}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{\sqrt{n}}{10} - \frac{10}{\sqrt{n}}}{0.3}\right). \end{aligned}$$

Dobbiamo allora risolvere

$$\Phi\left(\frac{\frac{\sqrt{n}}{10} - \frac{10}{\sqrt{n}}}{0.3}\right) \geq 0.99$$

ossia

$$\frac{\frac{\sqrt{n}}{10} - \frac{10}{\sqrt{n}}}{0.3} \geq 2.33$$

che si può riscrivere nella forma

$$n - 6.99\sqrt{n} - 100 \geq 0,$$

da cui $\sqrt{n} \geq 14.08$, ovvero $n \geq 199$.

Esercizio 94 Calcolare approssimativamente la probabilità che una variabile casuale X con distribuzione di Poisson di parametro 100 assuma un valore minore di 95.

Soluzione. Bisogna ricordare che se $X_1, \dots, X_{100} \sim Po(1)$ sono indipendenti, allora $X_1 + \dots + X_n \sim Po(100)$. Ricordando che $E(X_i) = Var(X_i) = 1$, la probabilità da calcolare è

$$P(\bar{X}_{100} \leq 0.95) = P(Z_{100} \leq -0.05 \cdot 10) \simeq \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 0.30854.$$

Esercizio 95 Un congegno è costituito da una componente elettrica che viene rimpiazzata non appena smette di funzionare. Dunque, se $T_1, T_2, \dots, T_n$ sono i tempi di vita di n componenti che si hanno a disposizione, il tempo di vita totale del congegno è $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$. Si supponga che $T_i \sim Exp(1)$, e che le T_i siano indipendenti. Utilizzando l'approssimazione normale calcolare:

- se $n = 100$ la probabilità $P(T < 90)$;
- il valore minimo di n per cui $P(T < 90) \leq 0.05$.

Soluzione. a.

$$P(\bar{T}_{100} < 0.9) = P(Z_{100} \leq -0.1 \cdot 10) \simeq \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.15866.$$

b.

$$P\left(\bar{T}_n < \frac{90}{n}\right) = P\left(Z_n < \left(\frac{90}{n} - 1\right) \sqrt{n}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}}\right).$$

Vogliamo allora che sia

$$\Phi\left(\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95,$$

da cui

$$\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}} \geq 1.64,$$

che si riscrive nella forma

$$n - 1.64\sqrt{n} - 90 \geq 0 \Rightarrow n \geq 107.$$

Esercizio 96 Un giocatore di pallacanestro ha una percentuale di successo nei tiri da tre punti del 20%. Calcolare:

- la probabilità che in 100 tiri faccia non più di 54 punti;
- il numero minimo di tiri che deve effettuare per realizzare almeno 57 punti con probabilità maggiore o uguale a 0.95.

Soluzione. a. Sia X_i la variabile di Bernoulli che vale 1 se l' i -esimo canestro viene realizzato. Poichè realizzare non più di 54 punti significa realizzare non più di 18 canestri, la probabilità da calcolare è

$$P\left(\bar{X}_{100} \leq \frac{18}{100}\right) = P\left(Z_{100} \leq \frac{-0.02}{\sqrt{0.2 \cdot 0.8}} 10\right) \simeq \Phi(-1) = 0.30854.$$

- Poichè realizzare almeno 57 punti significa realizzare almeno 19 canestri, si vuole che sia

$$P\left(\bar{X}_n \geq \frac{19}{n}\right) = P\left(Z_n \geq \frac{\frac{19}{n} - 0.2}{0.4} \sqrt{n}\right) \simeq \Phi\left(\frac{\frac{19}{n} - 0.2}{0.4} \sqrt{n}\right) \geq 0.95,$$

cioè

$$\frac{\frac{19}{n} - 0.2}{0.4} \sqrt{n} \geq 1.96 \Leftrightarrow 0.2 \cdot n - 0.784\sqrt{n} - 19 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 142.$$

Esercizio 97 Il numero giornaliero di passeggeri sui treni da Milano a Firenze è una variabile aleatoria di distribuzione incognita. Supponendo che il valore atteso sia pari a 3000 e la varianza pari a 10^6 , si calcoli approssimativamente la probabilità che in 30 giorni il numero complessivo di viaggiatori sia almeno 10^5 .

Soluzione. Sia X_i il numero di passeggeri de giorno i-mo.

$$\begin{aligned} P(X_1 + \dots + X_{30} > 10^5) &= P(\bar{X}_{30} > \frac{10^5}{30}) \\ &= P\left(\frac{\bar{X}_{30} - 3000}{1000} \sqrt{30} > \frac{333}{1000} \sqrt{30}\right) \simeq 1 - \Phi(1.825) \simeq 0.034. \end{aligned}$$

Esercizio 98 Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili casuali i.i.d. con distribuzione di Poisson di parametro 1. Usando opportunamente il Teorema del Limite Centrale per tale successione, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!}.$$

Soluzione. Notare che $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim Po(n)$. Ma allora

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} = P(S_n \leq n + \sqrt{n}) = P\left(\frac{\bar{X}_n - 1}{1} \sqrt{n} \leq 1\right).$$

Per il Teorema del limite centrale, la successione $\frac{\bar{X}_n - 1}{1} \sqrt{n}$ converge in distribuzione ad una Normale standard. Perciò

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} = \Phi(1).$$

Esercizio 99 Il gruppo promotore di un referendum ritiene che il 60% della popolazione sia disposta a firmare per la relativa raccolta di firme. Si assuma che le persone a cui viene richiesto di firmare siano scelte a caso. Dovendo raccogliere 30.000 firme, quante persone è necessario interpellare affinché la soglia delle 30.000 firme sia raggiunta con probabilità di almeno 0,95?

Soluzione. Sia X_i la variabile che vale 1 se l'i-esima persona interpellata accetta di firmare, e 0 altrimenti. Per ipotesi $X_i \sim Be(0.6)$, e le X_i si possono ritenere indipendenti. La probabilità in esame è, allora, usando l'approssimazione normale,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 30000\right) &= P\left(\frac{\bar{X}_n - 0.6}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}} \sqrt{n} \geq \frac{30000 - 0.6}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}} \sqrt{n}\right) \\ &\simeq 1 - \Phi\left(\frac{30000 - 0.6}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}} \sqrt{n}\right) = \Phi\left(0.6 - \frac{30000}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}} \sqrt{n}\right). \end{aligned}$$

Richiedendo che tale probabilità sia maggiore o uguale a 0.95, si ottiene:

$$0.6 - \frac{30000}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}} \sqrt{n} \geq \Phi^{-1}(0.95) \simeq 1.64$$

che equivale a

$$0.6n - 0.8\sqrt{n} - 30000 \geq 0$$

da cui

$$n \geq 50300.$$

Esercizio 100 Si assuma che, in un libro di 400 pagine, la probabilità che una pagina sia priva di errori sia 0.98, indipendentemente dalle altre pagine. Sia X il numero di pagine che contengono almeno un errore.

- Qual è la distribuzione di X ?
- Usando l'approssimazione normale, calcolare approssimativamente la probabilità dell'evento $\{X \geq 4\}$.
- Calcolare la probabilità al punto b. usando un altro tipo di approssimazione, visto a lezione.

Soluzione. a. Posto

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima pagina contiene almeno un errore} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha che $X_i \sim Be(0.02)$, le X_i sono indipendenti e $X = \sum_{i=1}^{400} X_i \sim B(400, 0.02)$.

b.

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(\bar{X}_{400} \geq 0.01) = P\left(Z_{400} \geq \frac{0.01 - 0.02}{\sqrt{0.02 \times 0.98}} \sqrt{400}\right) \\ &\simeq 1 - \Phi\left(Z_{400} \geq \frac{0.01 - 0.02}{\sqrt{0.02 \times 0.98}} \sqrt{400}\right) \simeq 0.92364. \end{aligned}$$

c. Usando l'approssimazione di Poisson, $Be(400, 0.02) \approx Po(8)$. Ne segue

$$P(X \geq 4) = 1 - \sum_{i=0}^3 P(X = i) = 1 - e^{-8} \sum_{i=0}^3 \frac{8^i}{i!} \simeq \dots$$