INTERVALLI DI CONFIDENZA

venerdì 16 maggio 2014 08.43

Supponiamo di avere due campioni $X_1, \dots, X_{n_1} \sim N(\mu_x, \sigma^2)$ e $Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim N(\mu_y, \sigma^2)$. Allora, se effettuiamo un test con $H_0: \mu_x = \mu_y$ e $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ e accettiamo H_1, a priori non sappiamo se questo è successo perché $\delta = \mu_x - \mu_y$ è significativo o perché n_1 ed n_2 sono alti.

Come facciamo ad avere un'idea di δ?

Prima idea: $\bar{X} - \bar{Y}$ stima δ:

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$$

Una cosa più fine potrebbe essere individuare, per un dato livello $1-\alpha$ (es. $1-\alpha = 95\%$), un intervallo $I_{1-\alpha}$ t. c. $\mathbb{P}\{\delta \in I_{1-\alpha}\} = 1-\alpha$: questo intervallo si chiama <u>intervallo di confidenza</u> di livello $1-\alpha$

Come si costruisce?

Sappiamo che in generale

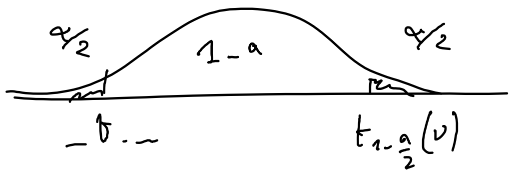
$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_{\bar{X}-\bar{Y}}} \not\sim t(\nu) \quad (\text{se } \mu_x \neq \mu_y)$$

però, $\forall \mu_x, \mu_y$

$$t' = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_x + \mu_y}{S_{\bar{X}-\bar{Y}}} \sim t(\nu)$$

..

Quindi, dato un livello $1-\alpha$:



$$1-\alpha = \mathbb{P}\left\{ |t'| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu) \right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{ -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu) < t' < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu) \right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{ -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\, s_{\bar{X}-\bar{Y}} < \bar{X} - \bar{Y} - \mu_x + \mu_y < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\, s_{\bar{X}-\bar{Y}} \right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{ \bar{Y} - \bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\, s_{\bar{X}-\bar{Y}} < \mu_y - \mu_x < \bar{Y} - \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\, s_{\bar{X}-\bar{Y}} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left\{ \mu_y - \mu_x \in I_{1-\alpha} \right\} = 1-\alpha, \text{ dove}$$

$$I_{1-\alpha} = \left[\bar{Y} - \bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\, s_{\bar{X}-\bar{Y}} \; ; \; \bar{Y} - \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\, s_{\bar{X}-\bar{Y}} \right]$$

esempio: $\mu_x = 1200$ $\mu_y = 1400$, $\bar{X} = 1150$, $\bar{Y} = 1400$

quindi $\delta \simeq 1400 - 1150 = 250$ (in realtà $\delta = 1400 - 1200 = 200$)

$s_{\bar{X}-\bar{Y}} = 92,1$; per $\alpha = 0,05$, cioè $1-\alpha = 95\%$

$I_{1-\alpha}$ ha estremi $\bar{Y} - \bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\, s_{\bar{X}-\bar{Y}} = 250 \pm 92,1 \cdot t_{0,975}(18)$

$(n_x = n_y = 10)$ $= 250 \pm 92.1 \times 2,101$

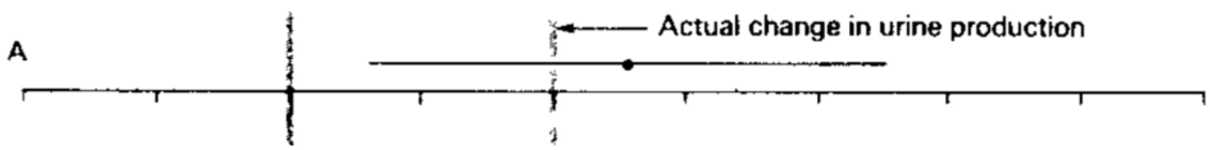
$I_{1-\alpha} = [57 \; ; \; 444]$

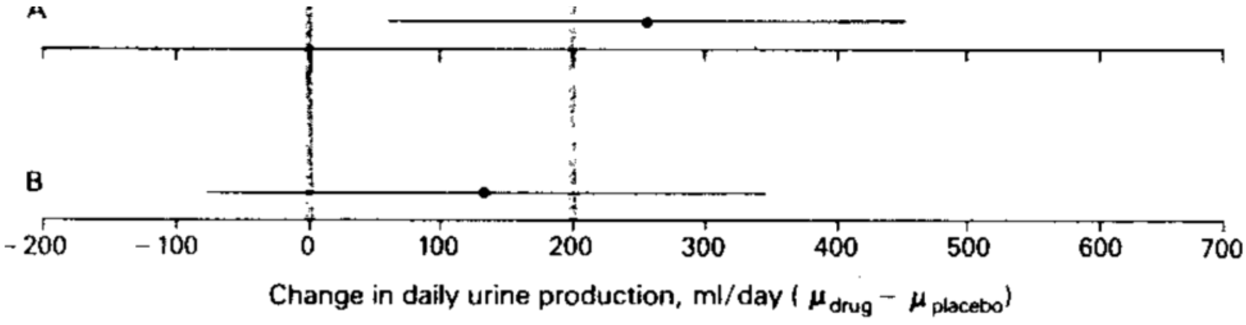
altro esempio: $\bar{X} = 1060$, $\bar{Y} = 1188$, $s_{\bar{Y}-\bar{X}} = 94$

$I_{1-\alpha}$ ha estremi $\bar{Y} - \bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\, s_{\bar{Y}-\bar{X}} =$

$= 1188 - 1060 \pm 2,101 \times 94 = 128 \pm 197,49$

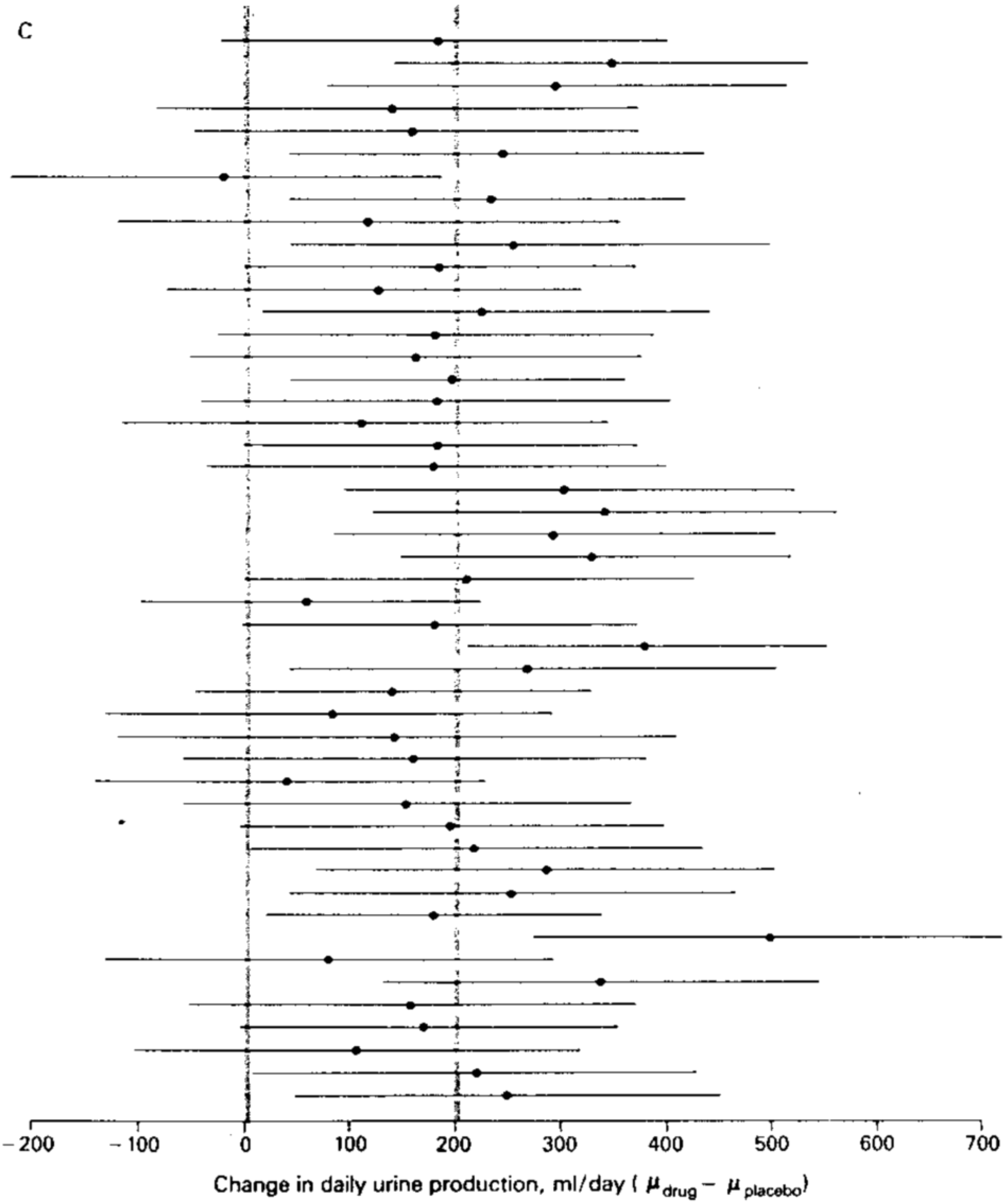
$I_{1-\alpha} = [-69,5 \; ; \; 325,5]$





Facciamo altre 48 stime di $I_{1-\alpha}$: in 3 casi su 50 (= 6%), $200 = \mu_Y - \mu_X \notin I_{0,95}$ e invece, nel 94% dei casi, $\mu_Y - \mu_X \in I_{1-\alpha}$.

Inoltre notiamo che in 27 casi su 50 (= 54%), $0 \in I_{1-\alpha}$: in questi casi, non si potrebbe escludere che la vera differenza delle medie sia 0



Che cosa significa confidenza?

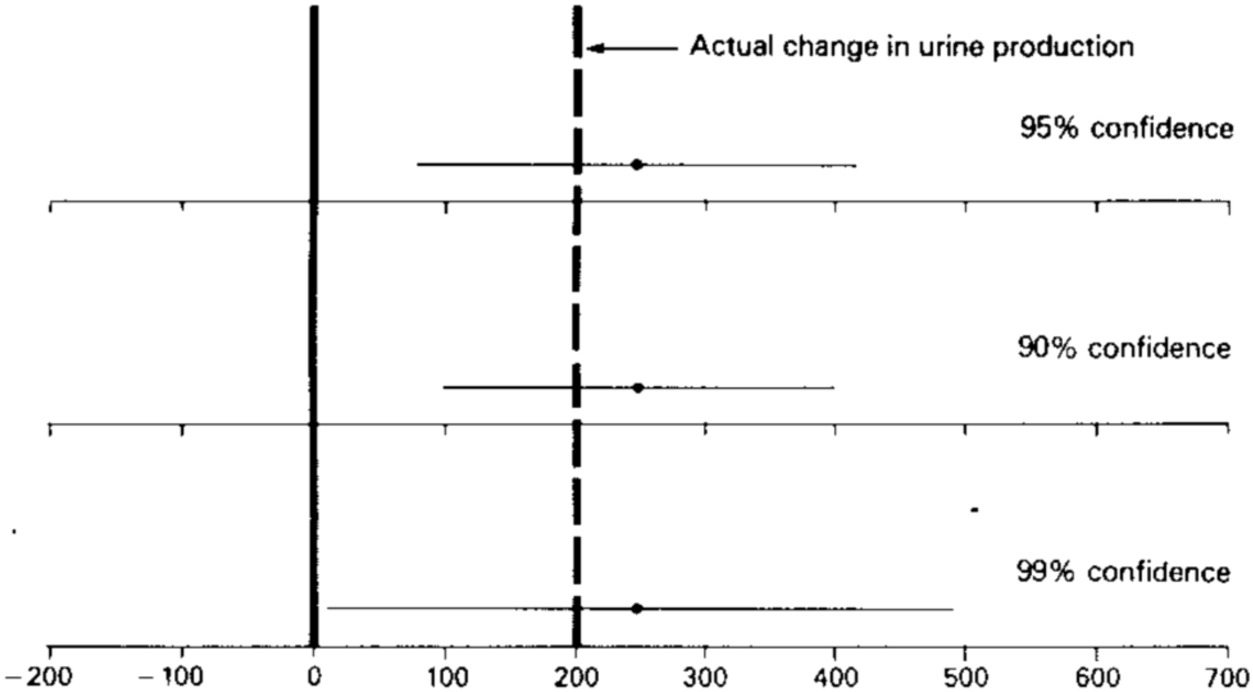
Per calcolare $I_{1-\alpha}$, dobbiamo specificare $1-\alpha$. Più è alto $1-\alpha$ più è largo $I_{1-\alpha}$

esempio: $\bar{X} = 1150$, $\bar{Y} = 1400$, $s_{\bar{X}-\bar{Y}} = 92,1$

$1 - \alpha = 95\% \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu) = 2,101$

$1 - \alpha = 99\% \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu) = t_{0,995}(18) = 2,552$

$1 - \alpha = 90\% \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu) = t_{0,95}(18) = 1,734$



Il prezzo che si paga restringendo $I_{1-\alpha}$ tramite $1-\alpha$ è che la probabilità (α) che la vera diff. di medie non appartenga aumenta.

Intervalli di confidenza e test di ipotesi

Se fissiamo $H_0: \mu_X = \mu_Y$ e $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ e un livello α, Se fissiamo $H_0: \mu_X = \mu_Y$ e $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ e un livello α,

allora la regola decisionale è

$$|t| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu) \iff H_0 \text{ acc.}$$

ma questo corrisponde a $0 \in I_{1-\alpha}$. Difatti:

$$|t| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu) \iff -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu) < \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$$

$$-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\, s_{\bar{X}-\bar{Y}} < \bar{X}-\bar{Y} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\, s_{\bar{X}-\bar{Y}}$$

$$\bar{Y}-\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\, s_{\bar{X}-\bar{Y}} < 0 < \bar{Y}-\bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\, s_{\bar{X}-\bar{Y}}, \text{ cioè}$$

$$0 \in I_{1-\alpha}$$

Quindi, una volta calcolato $I_{1-\alpha}$ (per $\mu_X - \mu_Y$), siamo in grado di effettuare un test di ipotesi $H_0: \mu_X = \mu_Y$ e $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ di livello α, con regola decisionale:

- se $0 \in I_{1-\alpha}$, accetto H_0
- se $0 \notin I_{1-\alpha}$, rifiuto H_0 e accetto H_1

<u>esercizio 7.2</u>: $\bar{X} = 8{,}5$, $s_X = 4{,}7$, $n_X = 65$,

$\bar{Y} = 13{,}9$, $s_Y = 4{,}1$, $n_Y = 21$

per $I_{1-\alpha}$, calcoliamo $\bar{Y}-\bar{X} = 13{,}9 - 8{,}5 = 5{,}4$

$$s_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\frac{s_X^2}{} + \frac{s_Y^2}{}} = \sqrt{\frac{4{,}7^2}{} + \frac{4{,}1^2}{}} = 1{,}07$$

$$s_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}} = \sqrt{\frac{4,7^2}{65} + \frac{4,1^2}{21}} = 1,07$$

$1-\alpha = 0,95$, $\nu = 65 + 21 - 2 = 84 \simeq 80$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu) \simeq t_{0,975}(80) = 1,990$$

$I_{1-\alpha}$ ha estremi $\bar{Y} - \bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu) \cdot s_{\bar{X}-\bar{Y}} = 5,4 \pm 1,990 \times 1,07$

$$I_{1-\alpha} = [3,27 ; 7,53] = I_{0,95}$$

test con $\alpha = 0,05$, $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$

$0 \notin I_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ rif. H_1 acc.