# APPROSSIMAZIONE DI POISSON

Se abbiamo $(X_i)_i$ i.i.d. $\sim Be(p)$, con "$p \simeq 0$".
Se "$n$ grande", allora $S_n = \sum_{1}^{n} X_i$ ha una legge è approssimabile con una $Po(\lambda)$, con $\lambda = np$

<u>teorema</u> IP: $S_n \sim B(n, p_n)$ tali che $n \to \infty$,

$\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ e $\lim_{n\to\infty} n p_n = \lambda > 0$ (es. $p_n = \frac{\lambda}{n}$)

TS: $\lim_{n\to\infty} P\{S_n = K\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^K}{K!}$

Questo significa che, per "$n$ grande" e "$p$ piccolo", $P\{S_n = K\} \simeq e^{-\lambda}\frac{\lambda^K}{K!}$
(scritto $S_n \approx Po(\lambda)$)

"$n$ grande" e "$p$ piccolo"?

$n > 100$ $\quad$ $p < 0{,}01$

<u>Calcoli relativi alle v.al binomiali</u>

Se vogliamo calcolare $P\{X = K\}$, con $X \sim B(n,p)$:

$n$
- "piccolo": calcolo diretto
- "grande" ma $n < 100$:
  - se è possibile, appr. normale ($np(1-p) > 5$, o $\begin{cases} np > 5 \\ n(1-p) > 5 \end{cases}$)
  - se no, calcolo diretto
- "grande": $n > 100$
  - se è possibile, appr. normale
  - se $p < 0{,}01$, appr. di Poisson
  - se no, calcolo diretto

## regola ricorsiva per le binomiali

Supponiamo di dover calcolare $\mathbb{P}\{X = K\}$ con $X \sim B(n, p)$

e $K = 0, 1, 2, \dots (\leq n)$. Allora...

$$\mathbb{P}\{X = K\} = \frac{n!}{K!(n-K)!} p^K (1-p)^{n-K}$$

$$\mathbb{P}\{X = K+1\} = \frac{n!}{(K+1)!(n-K-1)!} p^{K+1} (1-p)^{n-K-1} =$$

$$= \mathbb{P}\{X = K\} \frac{p}{1-p} \times \frac{n-K}{K+1}$$

## regola ricorsiva per le Poisson

Se $X \sim Po(\lambda)$:

$$\mathbb{P}\{X = K\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!}$$

$$\mathbb{P}\{X = K+1\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{K+1}}{(K+1)!} = \mathbb{P}\{X = K\} \times \frac{\lambda}{K+1}$$

**nota:** se $X \sim B(n, p)$ con $n > 100$, $p < 0{,}01$ allora

$X \approx Po(\lambda)$, con $\lambda = np$

$$\mathbb{P}\{X = K+1\} = \mathbb{P}\{X = K\} \frac{p}{1-p} \times \frac{n-K}{K+1} \simeq \quad (\text{se } K \ll n)$$

$$\simeq \mathbb{P}\{X = K\} \frac{np}{1 \times (K+1)} = \mathbb{P}\{X = K\} \frac{\lambda}{K+1}$$

esercizio 2.8

$n = 10^6 \,, \quad p = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$

n° batteri con mut. genetica : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

$\mathbb{P}\{X \leqslant 2\} = \, ?$

appr. normale? NO

$np(1-p) = \cancel{10^6} \cdot 0{,}5 \cdot \cancel{10^{-6}}(1 - 0{,}5 \cdot 10^{-6}) = 0{,}5 \cdot \ldots < 0{,}5 < 5$

$np = 10^6 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}5 < 5$

appr. di Poisson? OK!

$n = 10^6 > 100 \,, \quad p = 0{,}5 \cdot 10^{-6} < 0{,}01$

$\lambda = np = 0{,}5$

$\mathbb{P}\{X = 0\} = e^{-\lambda} = e^{-0{,}5} = 0{,}606$

$\mathbb{P}\{X = 1\} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda}{1!} = e^{-0{,}5} \cdot \dfrac{0{,}5}{1} = 0{,}303$

$\mathbb{P}\{X = 2\} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^2}{2!} = e^{-0{,}5} \cdot \dfrac{0{,}25}{2} = 0{,}075$

$\mathbb{P}\{X \leqslant 2\} = \mathbb{P}\{X=0\} + \mathbb{P}\{X=1\} + \mathbb{P}\{X=2\} =$

$= 0{,}984$

legge esatta: $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

$\mathbb{P}\{X = 0\} = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = \dfrac{\cancel{1000000!}}{0! \, \cancel{1000000!}} \cdot 1 \cdot (1 - 0{,}5 \cdot 10^{-6})^{10^6} =$

$= 0{,}606$

$\mathbb{P}\{X = 1\} = \binom{n}{1} p (1-p)^{n-1} = \dfrac{\cancel{1000000!}}{1! \, \cancel{999999!}} \cdot 0{,}5 \cdot \cancel{10^{-6}} (1 - 0{,}5 \cdot 10^{-6})^{10^6 - 1} =$

$= 0{,}303$

$\mathbb{P}\{X = 2\} = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \dfrac{\overset{\times 999999}{\cancel{1000000!}}}{2! \, \cancel{999998!}} \cdot 0{,}5^2 \cdot 10^{\overset{-6}{\cancel{-12}}} (1 - 0{,}5 \cdot 10^{-6})^{10^6 - 2} =$

$= 0{,}075$

legge esatta e appr. di Poisson danno "lo stesso risultato"

(diversi alla $6^a$ cifra decimale)