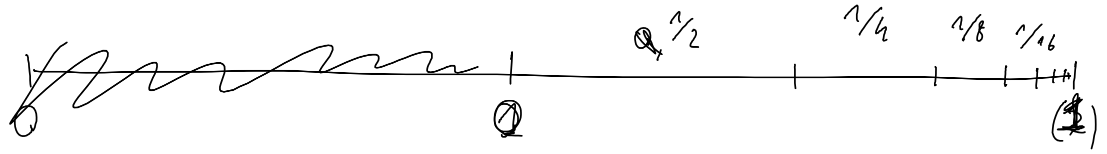
giovedì 27 marzo 2014 10.43

SOMME INFINITE E SERIE

A volte capita di dover fare somme infinite:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$



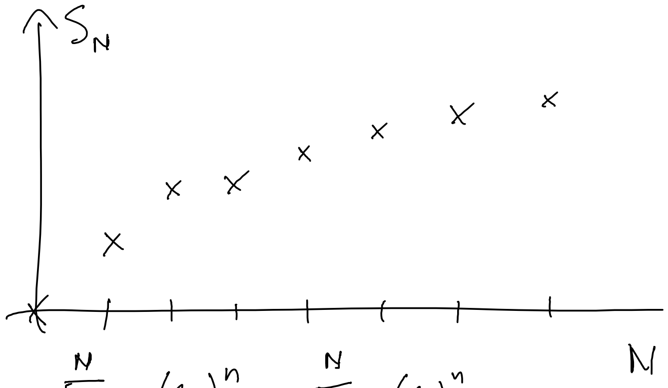
come si fa: se abbiamo $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$:

1) se $x_n \geq 0$, allora definiamo $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$ (somma finita)

e definiamo valore della <u>serie</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{N \to \infty} S_N$$

(potrebbe essere $+\infty$)



<u>esempio</u>: $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 =$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\right) - 1 = 1 - \frac{1}{2^N}$$

(abbiamo usato $\sum_{n=0}^{N} p^n = \frac{1 - p^{N+1}}{1 - p}$)

e $\lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^N}\right) = 1 - 0 = 1$

<u>esempio</u>: $x_n = \frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, \ldots$

allora si può dimostrare che $\sum_{0}^{\infty} {}_n\, x_n = e^{\lambda}$

<u>nota</u>: se $x_n \geq 0$, si può fare la somma in qualunque ordine

2) se x_n hanno segno qualsiasi, la serie converge se e solo se

$$\sum_{1}^{\infty} {}_n\, |x_n| < +\infty$$

In questo caso, il valore della serie è sempre

$$\sum_{1}^{\infty} {}_n\, x_n = \lim_{N \to \infty} S_N$$

<u>controesempio</u>: se proviamo a sommare infiniti ± 1:

$+1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots \longrightarrow$ indeterminato

$+1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + \dots \longrightarrow +\infty$

$+1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + \dots \longrightarrow -\infty$