

SOMME DI VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI

Spesso in statistica bisogna studiare quantità del tipo

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

con $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ i.i.d.

Qale legge ha S_n ?

Y generale, dipende dalla legge di $(X_i)_i$

esempio: $X_i \sim \text{Be}(p)$

allora $S_n \sim \text{B}(n, p)$

esempio: $X_i \sim \text{B}(K, p)$

allora ogni X_i ha la stessa legge di $T_i := \sum_{j=1}^K Y_i^j$

con Y_i^j , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, K$

i.i.d., $\sim \text{Be}(p)$

allora $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ha la stessa

legge di $\sum_{i=1}^n T_i$, e le $(T_i)_i$ sono ind., quindi:

$S_n \sim \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^K Y_i^j$ somme di nK v. al. ind.

e $\sim \text{Be}(p) \Rightarrow S_n \sim \text{B}(nK, p)$

esempio: se $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ind.

esempio: se $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ind.

$$\text{allora } X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

DIM: la parte difficile è dimostrare che $X_1 + X_2$ è gaussiana (integr. in 2 variabili - onestamente!). Una volta fatto questo:

$$E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = \mu_1 + \mu_2$$

$$\text{Var}[X_1 + X_2] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] (+ 2 \cdot 0) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Conseguenza: se $(X_i)_{i.i.d.} \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

esempio: se $X_1 \sim Po(\lambda_1)$ e $X_2 \sim Po(\lambda_2)$ ind.

$$X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$$

DIM: $X_1 + X_2$ è real. a valori in $\mathbb{N}$. Allora $\forall K \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P\{X_1 + X_2 = K\} &= P\left(\bigcup_{l=0}^K \{X_1 = l, X_2 = K - l\}\right) = (\text{disg.}) \\ &= \sum_{l=0}^K P\{X_1 = l, X_2 = K - l\} = \sum_{l=0}^K P\{X_1 = l\} P\{X_2 = K - l\} = \\ &= \sum_{l=0}^K e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^l}{l!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{K-l}}{(K-l)!} = \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1 - \lambda_2}}{K!} \sum_{l=0}^K \frac{K!}{l!(K-l)!} \lambda_1^l \lambda_2^{K-l} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{K!} (\lambda_1 + \lambda_2)^K$$

Conseguenza: se $(X_i)_i$ i.i.d. $\sim \text{Po}(\lambda)$, allora

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Po}(n\lambda)$$