

SPERANZA MATEMATICA

Se X è una v. al. reale, possiamo definire il suo "valore medio" tramite l'operazione di spérance matematica

Il caso più facile è quando X ha valori in E , con $E = \{n_1, \dots, n_n\}$. Allora definiamo la spérance di X come

$$E[X] = \sum_{n \in E} n P\{X = n\} = \sum_1^n n_i P\{X = n_i\}$$

esempio: $X \sim \text{Be}(p)$ $E = \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} E[X] &= 0 \times P\{X=0\} + 1 \times P\{X=1\} = \\ &= 0 \times (1-p) + 1 \times p = p \end{aligned}$$

esempio: $X \sim B(n, p)$, $E = \{0, 1, \dots, n\}$

$$E[X] = \sum_0^n K \times P\{X=K\} = \sum_0^n K \cdot \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} = ?$$

Proprietà della speranza matematica

Se X e Y sono v. al. reali che assumano un numero finito di valori, allora:

1) se $X \equiv b$, con $b \in \mathbb{R}$, allora $E[X] = b$

2) se $a, b \in \mathbb{R}$, allora $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$

3) se $X \geq 0$, allora $E[X] \geq 0$

4) se X e Y sono i.i.d., allora $E[X] = E[Y]$

esempio: $X \sim B(n, p)$

Allora X ha la stessa legge di $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, con $(Y_i)_i$

i.i.d. $\sim Be(p)$; allora

$$E[X] \stackrel{(4)}{=} E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^n Y_i\right] \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^n E[Y_i] = \sum_{i=1}^n p = np$$

Vogliamo ora generalizzare il concetto di speranza a v. al.

che assumono un numero infinito di valori

1° caso: $X \geq 0$

Se X è discreta (a valori in E), allora

$$E[X] = \sum_{x \in E} x P\{X = x\}$$

esempio: v. al. di Poisson

X è di Poisson di parametro $\lambda > 0$ se $(X \sim Po(\lambda))$

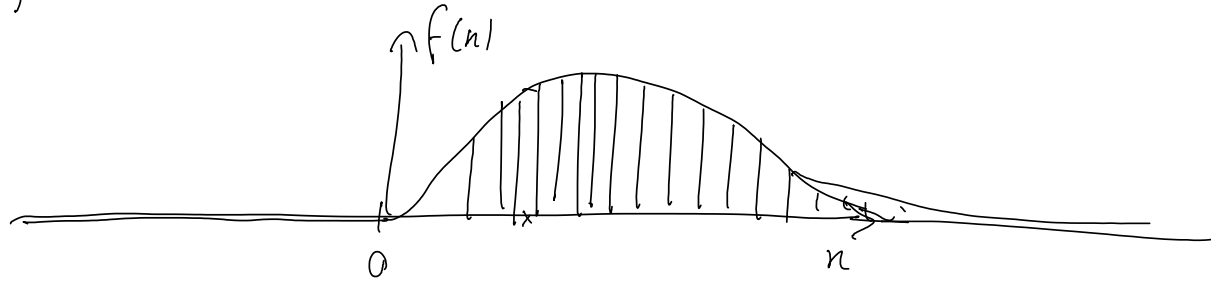
$$P\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \geq 0, (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{allora } \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_0^{\infty} K \cdot P\{X=K\} = \sum_1^{\infty} K \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!} = \\
 &= e^{-\lambda} \sum_1^{\infty} K \frac{\lambda^K}{(K-1)!} = e^{-\lambda} \sum_1^{\infty} \frac{\lambda^{K-1} \cdot \lambda}{(K-1)!} = \quad l=K-1 \\
 &= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_0^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda
 \end{aligned}$$

Se X è continua di densità f , siccome $X \geq 0$ si avrà $f(x) = 0 \quad \forall x < 0$



Definiamo speranza di X come

$$E[X] = \int_0^{+\infty} x f(x) dx$$

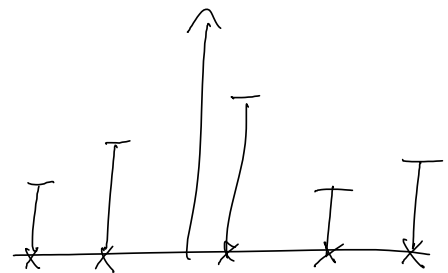
Se $E[X] = +\infty$, allora X non ammette speranza finita

2° caso: X assume sia valori positivi che negativi.

In questo caso si definiscono

$$X^+ := \max(X, 0)$$

$$X^- := \max(-X, 0) = -\min(X, 0)$$



Allora $X = X^+ - X^-$, $X^+ X^- \geq 0$. Definiamo

allora

$$E[X] := E[X^+] - E[X^-]$$

quando questa somma è determinata. Se invece una delle due speranze $E[X^+]$ o $E[X^-]$ è infinita, diciamo che X non ammette speranza finita.

Se X assume un numero finito di valori, allora $E[X]$ è sempre ben definita, e coincide con la definizione iniziale.

Se X è continua di densità f , allora $E[X]$ è ben definita

se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < +\infty$$

Allora

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \in \mathbb{R}$$

esempio: $X \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^0 -x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \\ &+ \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_{-\infty}^0 + \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < \infty \end{aligned}$$

allora $E[X] \in \mathbb{R}$, ed è data da

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

esempio: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$X = \sigma Y + \mu, \text{ con } Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

siccome $E[Y] = 0$, allora

$$E[X] = E[\sigma Y + \mu] \stackrel{(2)}{=} \sigma E[Y] + E[\mu] \stackrel{(1)}{=} \sigma \times 0 + \mu = \mu$$

esercizio 2.4

$$X = X_1 - X_2, \text{ con } X_1, X_2 \text{ i.i.d. } \sim \text{Be}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$E[X] = ?$$

1° modo: $X = -1, 0, +1$:

$$P\{X = -1\} = P\{X_1 = 0, X_2 = 1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P\{X = 1\} = P\{X_1 = 1, X_2 = 0\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P\{X = 0\} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} =$$

$$= P\{X_1 = X_2 = 1 \text{ o } X_1 = X_2 = 0\} =$$

$$= P\{X_1 = X_2 = 1\} + P\{X_1 = X_2 = 0\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E[X] = -1 \cdot P\{X = -1\} + 0 \cdot P\{X = 0\} + 1 \cdot P\{X = 1\} =$$

$$= -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

2° modo:

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X_1 - X_2] = E[X_1] - E[X_2] = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$