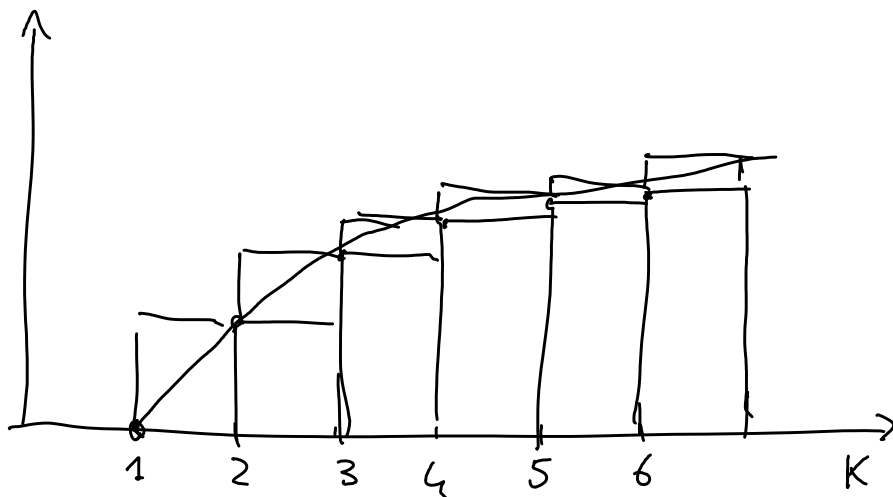


Formula di Stirling

giovedì 2 aprile 2015 09.46

Supponiamo di dover calcolare $n!$ con n "grande".

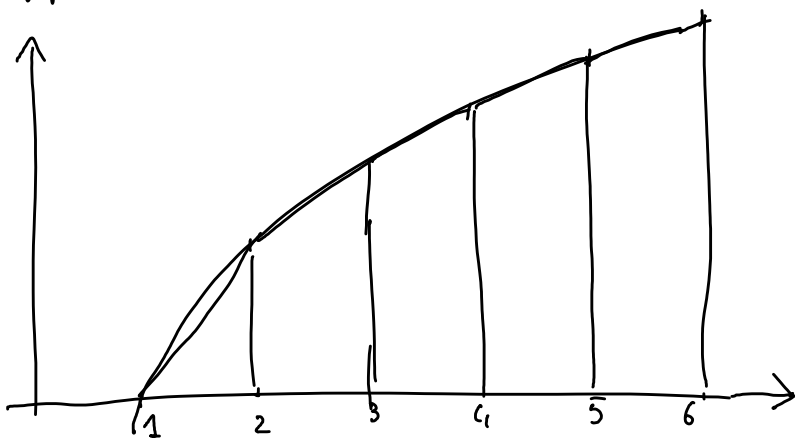
Una approssimazione $\log n! = \sum_{k=1}^n \log k$?



$$\sum_{k=1}^n \log k \approx \int_1^n \log x dx$$

regole dei rettangoli

approssimazione migliore: regola dei trapezi



$$\begin{aligned} \int_1^n \log x dx &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\log k + \log(k+1)}{2} \times 1 = \\ &= \frac{2 \sum_{k=1}^n \log k - \log 1 - \log n}{2} = \\ &= \log n! - \frac{\log n}{2} \end{aligned}$$

$$\int_a^b \log x dx = \left[x \log x \right]_a^b - \int_a^b \frac{x}{x} dx =$$

$$= b \lg b - a \lg a - b + a$$

$$a = 1, b = n \Rightarrow \int_1^n \lg x \, dx = n \lg n - n + 1$$

$$\lg n! \simeq \int_1^n \lg x \, dx + \frac{\lg n}{2} = n \lg n + \frac{1}{2} \lg n - n + 1$$

$$n! \simeq e^{n \lg n} e^{\frac{1}{2} \lg n} e^{-n+1} = n^n n^{\frac{1}{2}} e^{-n+1} = e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

nota: $\int_1^n \lg x \, dx >$ area dei trapezi, ma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_1^n \lg x \, dx - \text{area dei trapezi} \right) = C$$

$$\text{e quindi } n! \simeq K \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

la costante moltiplicativa "giusta" è $K = \sqrt{2\pi}$

$$\text{e quindi } n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

formule di Stirling