

TEOREMI LIMITE

Supponiamo di avere $(X_i)_i$ i.i.d., e definiamo

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i$$

Siamo interessati ad approssimare la legge di S_n per "n grande"

Diciamo che una successione di variabili decabase $(Y_n)_n$ converge in probabilità alla v. d. Y se $\forall \delta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{|Y_n - Y| > \delta\} = 0$$

$$(Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y)$$

legge dei grandi numeri $\mathbb{P} : (X_i)_i$ i.i.d., $\exists \mu = E[X_i]$

$$TS: \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu \quad (\text{cioè } \mathbb{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \delta\right\} \rightarrow 0 \quad \forall \delta > 0)$$

esempio di applicazione sbagliata: $(X_i)_i$ i.i.d. $\sim \text{Be}(p)$

allora $E[X_i] = p$, e la l.g.n. dice $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} p$

Supponiamo che, per un certo n , $S_n = 0$. Allora

$$\frac{0 + \dots + 0}{n} (= 0) \simeq p$$

siccome deve verificarsi la l.g.n., allora devono iniziare

a uscire $X_i = 1$, in modo da avere

$$\frac{0 + \dots + 0 + 1 + \dots}{n+k} \stackrel{d}{=} p$$

$X_{n+1} + \dots + X_{n+k}$

Convergenza in legge. Diciamo che una successione di v. al. $(Y_n)_n$ converge in legge a $N(0,1)$ se, detta F_n la f. di rip. di $Y_n \forall n \geq 1$ ($F_n(t) = \mathbb{P}\{Y_n \leq t\}$) e F la f. di rip. di $N(0,1)$ (cioè $F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt$, con f densità di una $N(0,1)$), abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F(t) \quad \forall t \text{ in cui } F \text{ è continua}$$

teorema limite centrale IP: $(X_i)_i$ v. al. i.i.d., $\exists \mu = E[X_i]$

$$\exists \sigma^2 = \text{Var}[X]; S_n := \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$S_n^* := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$\forall S: (S_n^*)_n$ converge in legge a $N(0,1)$

applicazione: approssimazione normale

per "n grande", possiamo approssimare $F_{S_n^*}(t)$ con $F(t) = \mathbb{P}\{Z \leq t\}$
 $\forall t \in \mathbb{R}$
 con $Z \sim N(0,1)$; allora, se $x \in \mathbb{R}$ abbiamo

con $Z \sim N(0, 1)$; allora, se $x \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_n \leq x\} &= F_{S_n}(x) = \mathbb{P}\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right\} \approx \\ &\approx F_Z\left(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

"n grande" = ... dipende dal tipo di v. al. $(X_i)_i$.
generalmente viene accettato $n \geq 30$ o $n \geq 50$

esempio: $(X_i)_i$ i.i.d. $\sim \text{Be}(p)$. Allora

$$F_{S_n}(x) = \mathbb{P}\{S_n \leq x\} \approx F_Z\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

"n grande": $np(1-p) > 5$, oppure $\begin{cases} np > 5 \\ n(1-p) > 5 \end{cases}$

$$\text{nota: } \mathbb{P}\{S_n \leq x\} \approx \mathbb{P}\left\{Z \leq \frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\underbrace{\sigma\sqrt{n}Z + n\mu}_{N(n\mu; \sigma^2 n)} \leq x\right\}$$

quindi $S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$ per "n grande"

$$\text{nota: } E[S_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n \mu = n\mu$$

$$\text{Var}[S_n] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = n\sigma^2$$

esempio $(X_i)_{i=1, \dots, 25}$ i.i.d. $\sim \text{Be}(p)$, $p = \frac{1}{2}$

$$P\{S_{25} \leq 15\} = \dots$$

appr normale: $np(1-p) = 25 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 6,25 > 5$ OK

$$P\{S_{25} \leq 15\} = P\left\{\frac{S_{25} - np}{\underbrace{\sigma\sqrt{n}}_{\sqrt{np(1-p)} \approx N(0,2)}} \leq \frac{15 - 12,5}{2,5}\right\} \approx$$

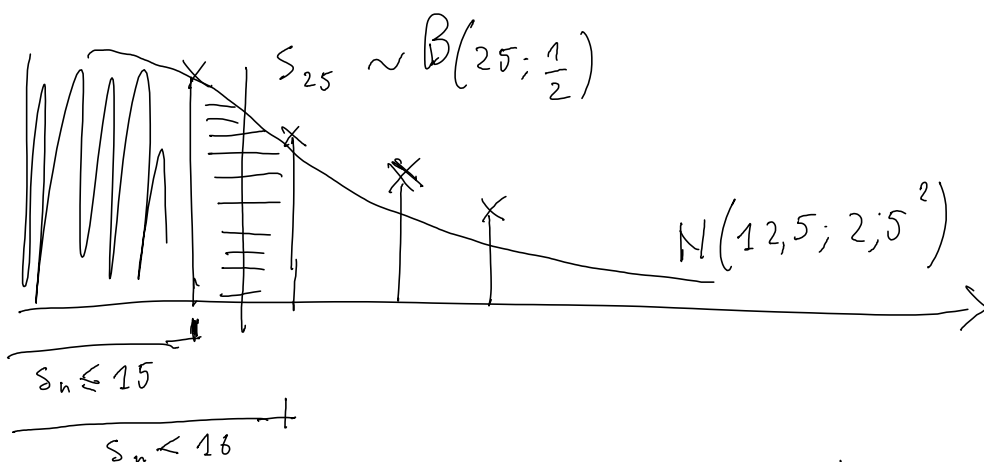
$$\approx F_Z(1) = 0,841$$

ma, siccome S_{25} ha valori interi, $\{S_{25} \leq 15\} = \{S_{25} < 16\}$

$$P\{S_{25} < 16\} = P\left\{\frac{S_{25} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{16 - 12,5}{2,5}\right\} \approx$$

$$\approx F_Z(1,4) = 0,919$$

perché succede?



correzione di continuità: scrivere $\{S_n \leq 15\} = \{S_n < 16\} =$

$$= \{S_n \leq 15,5\}$$

$$\text{in } \dots \quad | S_n - np \quad , \quad 15,5 - 12,5 \quad / \dots$$

$$P\{S_n \leq 15,5\} = P\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{15,5 - 12,5}{2,5}\right\} \approx$$

$$\approx F_Z(1,2) = 0,884$$

$$\underline{\underline{\text{nota}}}: P\{S_{25} \leq 15\} = 0,885$$