

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

- esperimento aleatorio: qualunque "esperimento" di cui non conosciamo univocamente il risultato
- evento: una descrizione del risultato del nostro esperimento aleatorio
- variabile aleatoria: variabile che esprime un risultato dell'esperimento aleatorio
- esempio: esperimento aleatorio "lancio di un dado"

possibili eventi: $A = \{\text{esce un } n^{\circ} \text{ pari}\}$
 $B = \{\text{esce } 1\}$

var. al. $X =$ risultato del lancio

$$A = \{X = 2, \text{ o } X = 4, \text{ o } X = 6\}$$

$$B = \{X = 1\}$$

eventi particolari:

evento certo: si verifica con qualunque

risultato dell'esp. al. (es. $\{1 \leq X \leq 6\}$)

evento impossibile: NON si verifica in nessun caso (es. $\{X = 10\}$)

esempio: misura di n altezze

var. al.: $X_1, \dots, X_n$, ognuna corrispondente all'altezza dell'individuo $1, \dots, n$

eventi possibili : $\{X_1 \geq 50\}, \{\bar{X} \in (40, 60)\}$

Interpretazione insiemistica

Ω = spazio campionario : insieme che raccoglie tutti i possibili risultati ("interessanti") del nostro esperimento aleatorio

evento : qualunque sottoinsieme $A \subseteq \Omega$

variabile aleatoria a valori in E :

funzione $X: \Omega \rightarrow E$

esempio : lancio di un dado

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$$

eventi possibili : $A = \{2, 4, 6\}, B = \{1\}$

var. al. "risultato del lancio" $X(\omega) = \omega$

$$\forall \omega \in \Omega$$

con spazio di arrivo $E = \{1, \dots, 6\}$, o

$$E = \mathbb{N}$$

esp. al. "misura di n altezze"

$$\Omega = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} \text{ sp. cont.}$$

$$A = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \geq 40\} \text{ (evento)}$$

$X_1, \dots, X_n$ var. al. :

$$X_i(x) = x_i$$

$$\text{altre v. al. : } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

in questo caso, $X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Un secondo dello spazio di arrivo E di una v. al., si dice :

- v. al. reale se $E \subseteq \mathbb{R}$
- vettore aleatorio se $E \subseteq \mathbb{R}^n$
- v. al. discreta se E è discreto
(cioè finito o numerabile)

Operazioni tra eventi e variabili aleatorie

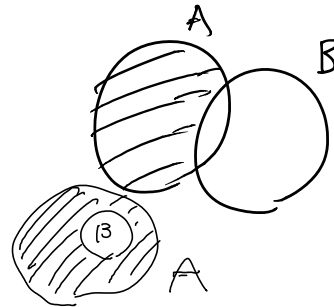
Gli eventi si possono verificare o meno:
possiamo usare su di loro operazioni logiche

A e B (si verificano entrambi)	$A \cap B$
A o B (si verifica almeno uno dei due)	$A \cup B$
non A (A non si verifica)	A^c
interp. logica	int. insiemistica

si possono definire altre operazioni: ad es.

$$A \setminus B = \text{el. di } A \text{ che non appartengono a } B$$

$$= A \cap B^c$$



interp. insiemistica: evento certo $= \Omega$
evento impossibile $= \emptyset$

complementare $A^c = \Omega \setminus A$

oppure: $A \cup A^c = \Omega$,

$$A \cap A^c = \emptyset$$

se $A \cap B = \emptyset$: ev. disgiunti
(o incompatibili)

operazioni su v. al. reali: qualunque

operazione ammessa sui numeri reali

es. $\therefore X_1 + X_2, X_1 \cdot X_2, \log X_3,$

da v. al. a evento: $\{X_1 \geq 40\} =: A$

da evento a v. al.:

funzione indicatrice dell'evento A la v. al.

$$1_A := \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ si verifica} \\ 0 & \text{se } A \text{ non si verifica} \end{cases}$$

$$1_A: \Omega \rightarrow E = \{0, 1\} \text{ b.c.}$$

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \in A^c \end{cases}$$

Probabilità

Una probabilità P associa ad ogni evento un numero in $[0, 1]$ con le due proprietà

$$1) P(\Omega) = 1$$

$$2) \text{ se } A \text{ e } B \text{ disgiunti, allora } P(A) + P(B) = P(A \cup B)$$

additività

Da sequenze delle proprietà di base:

$$\bullet P(\emptyset) = 0$$

DIM: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ e l'unione è disgiunta $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 1 = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = \\ &= 1 + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

esempio: lancio di un dado non truccato

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}$$

$IP(\Omega) = 1$; si vogliono che $IP\{\omega\} = IP\{\omega'\}$

$\forall \omega, \omega' \in \Omega$, scegliere $IP\{\omega\} = \frac{1}{6} \forall \omega$

e quindi

$$IP(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6}$$

($|A|$ = cardinalità di A)

probabilità uniforme: tutti i risultati
elementari dell'esperimento aleatorio sono
equiprobabili

Esercizio 1.1

$n = 12$

per trovare medie, (varianze) dev. st. ed m. st. medie, applicare
le formule:

$$\bar{X} = \frac{289 + 203 + 359 + 243 + 232 + 210 + 251 + 246 + 224 + 239 + 220 + 211}{12}$$
$$= 243,92$$

var: formula $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \rightarrow O(3n)$ operazioni

$$(x_i - \bar{X})^2 = x_i^2 - 2\bar{X}x_i + \bar{X}^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{X}^2 = \\ &= \sum x_i^2 - 2\bar{X} \cdot n\bar{X} + n\bar{X}^2 = \\ &= \sum x_i^2 - n\bar{X}^2 \end{aligned}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{X}^2 \right) \rightarrow O(2n) \text{ operazioni}$$

$$(\text{facile i conti}) \quad S_x = \sqrt{S_x^2} = 43,06$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{12}} = 12,42$$

Per i percentili, bisogna riordinare i dati:

203 210 211 | 220 224 232 | 239 243 246 || 251 289 359

per mediana: 50% di 12 = 6 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{mediana} &= (\text{qualunque n}^\circ \text{ tra } 232 \text{ e } 239) \\ &= \frac{232 + 239}{2} = 235,5 \end{aligned}$$

per 25% perc.: 25% di 12 = 3

$$25\% \text{ perc.} : \frac{211 + 220}{2} = 215,5$$

$$75\% \text{ perc.} : \frac{246 + 251}{2} = 248,5$$