

PROPRIETÀ DELLA PROBABILITÀ

a) se A, B eventi tali che $A \subseteq B$, allora

$$P(A) \leq P(B), \text{ e } P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

b) se A evento, allora $P(A^c) = 1 - P(A)$

c) se $A_1, \dots, A_n$, allora $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$; se poi sono disgiunti, allora $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

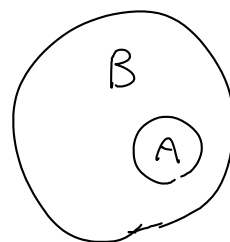
$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \right)$$

d) se A, B eventi, allora $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$

DIM: a) si avrà $B = A \cup (B \setminus A)$,
e l'unione è disgiunta $\Rightarrow$

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \text{ e quindi}$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A)$$



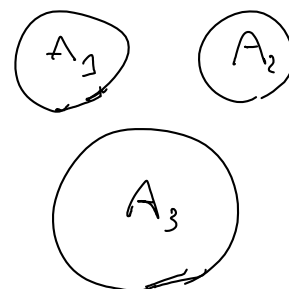
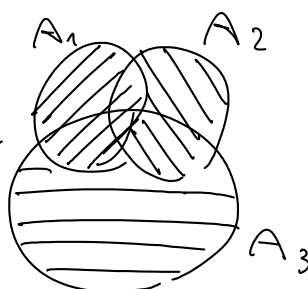
b) prendo $B = \Omega$ e uso il punto a):

$$P(A^c) = P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$$

$$c) A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n =$$

$$= A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus \bigcup_{i=1}^2 A_i) \cup \dots$$

$$\dots \cup (A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \quad \text{disg.} \Rightarrow$$



$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + P(A_3 \setminus \bigcup_{i=1}^2 A_i) + \dots$$

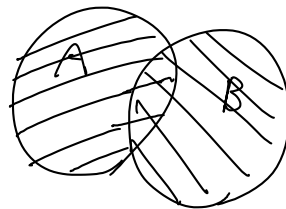
$$\dots + P(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

$$\dots + P(A_n \setminus \bigcup_1^{k-1} A_i) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

poiché $A_k \setminus \bigcup_1^{k-1} A_i \subseteq A_k$

se poi $A_1, \dots, A_n$ sono disgi., si ha =

$$\begin{aligned} d) A \cup B &= A \cup (B \setminus A) = \\ &= B \cup (A \setminus B) = \\ &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$



sono tutte unioni disgiunte $\Rightarrow$

$$P(A \cup B) \stackrel{①}{=} P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

$$P(A \cup B) \stackrel{②}{=} P(A) + P(B \setminus A)$$

$$\stackrel{③}{=} P(B) + P(A \setminus B) \Rightarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) =$$

$$= P(B) + P(A \cup B) + P(A \cap B) + ② P(A \cup B) - P(A)$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) + \cancel{P(A \cup B)} = 2P(A \cup B) + P(A \cap B)$$

notazione: un evento A tale che $P(A) = 1$ si dice

evento quasi certo; un evento B con $P(B) = 0$ si dice

evento trascurabile; infine, se $\omega \in \Omega$ e $A = \{\omega\}$,

A si dice evento elementare, o singoleto

LEGGE DI UNA VARIABILE ALEATORIA

Se X v. al. a valori in E , allora per ogni $A \subseteq E$

si può definire l'evento $\{X \in A\}$, che ha una probabilità $P\{X \in A\}$. Possiamo quindi definire una

corrispondenza tra i sottoinsiemi di E e $[0,1]$:

$$A \rightarrow \mathbb{P}\{X \in A\}$$

$$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}\{X \in A\}$$

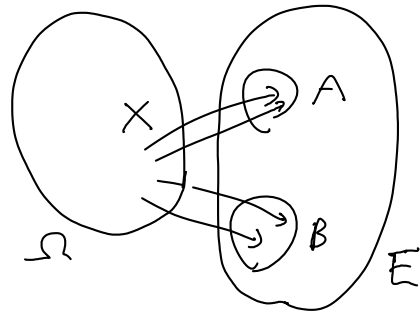
distribuzione, o legge, della variabile aleatoria X

ha le proprietà di una probabilità su E :

$$\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}\{X \in E\} = 1$$

se A e $B \subseteq E$ disgiunti, allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X(A \cup B) &= \mathbb{P}\{X \in A \cup B\} = \\ &= \mathbb{P}(\{X \in A\} \cup \{X \in B\}) \quad (\text{un. disgiunta}) \\ &= \mathbb{P}\{X \in A\} + \mathbb{P}\{X \in B\} = \mathbb{P}_X(A) + \mathbb{P}_X(B)\end{aligned}$$



quindi $\mathbb{P}_X$ è una probabilità su E

esempio: $X = \mathbb{1}_A$, con A evento $\left(= \begin{cases} 1 & \text{se si ver. } A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \right)$

spazio di arrivo: $E = \{0, 1\}$

possibili sottoinsiemi: $\emptyset, \{0\}, \{1\}, E$

legge di X :

$$\mathbb{P}_X(\emptyset) = \mathbb{P}\{X \in \emptyset\} = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}_X(\{0\}) = \mathbb{P}\{X \in \{0\}\} = \mathbb{P}\{X = 0\} = \mathbb{P}(A^c) \quad (= 1 - p)$$

$$\mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}\{X \in \{1\}\} = \mathbb{P}\{X = 1\} = \mathbb{P}(A) \quad (= p)$$

$$\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}\{X \in E\} = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

se chiamiamo $p := \mathbb{P}(A)$, diciamo che X ha legge di

Bernoulli di parametro p : $X \sim \text{Be}(p)$ $\left(\begin{array}{l} X \text{ var. al. di} \\ \text{Bernoulli} \end{array} \right)$

o variabile aleatoria gaussiana

X v. al. reale, di legge tale che per ogni intervallo

$I \subseteq \mathbb{R}$ di estremi a, b

$$P_X(I) = P\{X \in I\} = \int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{cio } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ dove } I \text{ può essere}$$

$$(a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$$

f si chiama densità di X , e la legge di X

si indica come legge gaussiana di parametri μ e σ^2

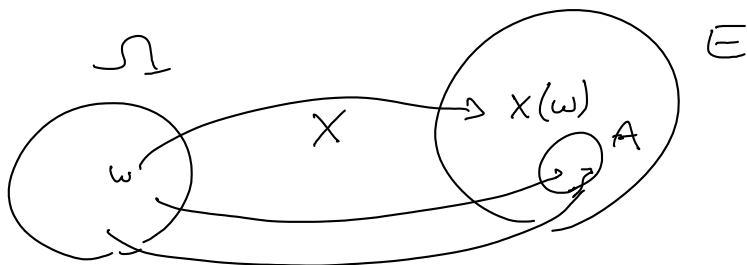
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

interpretazione insiemistica: Ω insieme, P : sottoinsiemi

$$\text{di } \Omega \rightarrow [0, 1], \quad X: \Omega \rightarrow E$$

in questa interpretazione, la legge di X è definita sui sottoinsiemi di E in questo modo: $\forall A \subseteq E$,

$$P_X(A) = P\{X \in A\} = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = \\ = P(X^{-1}(A))$$



Due variabili aleatorie X e Y si dicono identicamente distribuite (i.d.) se hanno la stessa legge.

es-mp: se $X \sim \text{Be}(\frac{1}{2})$ e $Y := 1 - X$, allora X e Y

esempio: se $X \sim \text{Be}(\frac{1}{2})$ e $Y := 1 - X$, allora X e Y sono i.i.d.:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y=1\} &= \mathbb{P}\{1-X=1\} = \mathbb{P}\{X=0\} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ &= \mathbb{P}\{X=1\}; \text{ di conseguenza:} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}\{Y=0\} = 1 - \mathbb{P}\{Y=1\} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}\{Y \in \emptyset\} = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}\{Y \in \{0,1\}\} = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\Rightarrow Y \sim \text{Be}(\frac{1}{2}), X \text{ e } Y \text{ sono i.i.d., ma } X \neq Y$$

esempio: $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

X = vincite al seguente gioco:

- se esce 6, vinco 10
- se esce 5, vinco 2
- altrimenti, non vinco niente.

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \begin{cases} 10 & \text{se } \omega = 6 \\ 2 & \text{se } \omega = 5 \\ 0 & \text{se } \omega = 1, 2, 3 \text{ o } 4 \end{cases}$$

spazio di arrivo di X : $E = \{0, 2, 10\}$

Se su Ω assegno una probabilità uniforme $\mathbb{P}$, allora

$$\mathbb{P}\{\omega\} = \frac{1}{6} \quad \forall \omega \in \Omega$$

legge di X :

$$\mathbb{P}\{X=10\} = \mathbb{P}\{\omega=6\} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}_X(\{10\})$$

$$\mathbb{P}\{X = 10\} = \mathbb{P}\{\omega = 6\} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}\{X = 2\} = \mathbb{P}\{\omega = 5\} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}\{X = 0\} = \mathbb{P}\{\omega = 1, 2, 3, 4\} = \frac{4}{6}$$

$$= \mathbb{P}_X(\{10\})$$

$$= \mathbb{P}_X(\{2\})$$

$$= \mathbb{P}_X(\{0\})$$