

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

Se X è v. al. reale, allora $\forall t \in \mathbb{R}$ possiamo definire l'evento $\{X \leq t\}$, e calcolarne la probabilità $\mathbb{P}\{X \leq t\}$.

Chiamiamo funzione di ripartizione, o di distribuzione, di X la funzione $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$F_X(t) := \mathbb{P}\{X \leq t\}$$

F_X è non decrescente: infatti se $s < t$, allora

$$\begin{aligned} \{X \leq s\} &\subseteq \{X \leq t\} \\ \Rightarrow \mathbb{P}\{X \leq s\} &\leq \mathbb{P}\{X \leq t\}, \text{ e} \\ \text{"} &\text{"} \\ F_X(s) &\leq F_X(t) \end{aligned}$$

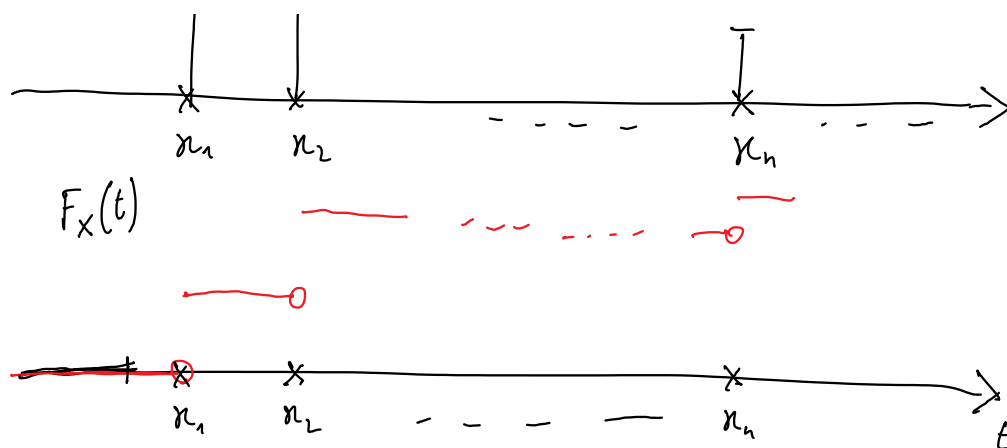
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X \leq t\} - \mathbb{P}\{X \leq s\} &= F_X(t) - F_X(s) = \\ &= \mathbb{P}(\{X \leq t\} \setminus \{X \leq s\}) = \mathbb{P}\{s < X \leq t\}, \text{ cioè} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}\{X \in (s, t]\} = F_X(t) - F_X(s)$$

esempio: v. al. discrete

se X è a valori in E discreto, allora $(E = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\})$





$$F_X(t) = \sum_{\substack{x \in E \\ x \leq t}} \mathbb{P}\{X = x\}$$

esempio: $X \sim \text{Be}(p)$: $E = \{0, 1\}$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1-p & \text{se } t \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

esempio: variabili aleatorie continue

X si dice continua di densità f se $\forall I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$$\mathbb{P}\{X \in I\} = \int_I f(x) dx$$

(es. f densità gaussiana) - In questo caso

$$F_X(t) = \mathbb{P}\{X \leq t\} = \mathbb{P}\{X \in (-\infty, t]\} = \int_{-\infty}^t f(u) du$$

Ovvero anche $\mathbb{P}\{X = t\} = 0 \quad \forall t$: difetti:

$$\mathbb{P}\{X \leq t\} = \mathbb{P}\{X \in [t, t]\} = \int_t^t f(u) du = 0, \text{ e quindi}$$

$$\mathbb{P}\{X \in [a, b)\} = \mathbb{P}\{X \in (a, b]\} = \mathbb{P}\{X \in (a, b)\} = \mathbb{P}\{X \in [a, b]\} =$$

$$= F_X(b) - F_X(a) \quad \forall a \leq b$$

esempio: se X r. al. a valori in $\mathbb{N}$:

$$F_X(t) = \sum_{n \leq t} \mathbb{P}\{X = n\} \quad , \text{ e anche:}$$

$$\mathbb{P}\{X = n\} = \mathbb{P}\{X \in (n-1, n]\} = F_X(n) - F_X(n-1)$$