

PROBABILITA' CONDIZIONATA

esempio: roulette...truccata

$$\Omega = \{0, 1, \dots, 36\} \quad \text{IP uniforme: } P\{\omega\} = \frac{1}{37} \quad \forall \omega \in \Omega$$

giochi sull'evento $A = \{10, 11, 12\}$

$$P(A) = \frac{3}{37} = 0,081$$

Supponiamo di sapere che uscirà un numero dispari.

Un modo (inefficiente) per ricalcolare la prob di A è ridefinire Ω , IP uniforme su Ω e ricalcolare

$$P(A) = \frac{1}{18} = 0,055$$

Un altro modo, più efficiente, è definire la probabilità condizionata.

Se B è un evento non trascurabile ($P(B) > 0$), definiremo probabilità condizionata a B di un evento A come

$$(*) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Nel nostro esempio, $B = \{1, 3, \dots, 35\}$, e

$$P(A \cap B) = P\{11\} = \frac{1}{37}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{37} = \frac{18}{37}$$

$$|\Omega| \quad 37$$

$$P(A|B) = \frac{1/37}{18/37} = \frac{1}{18} = 0,055$$

conseguenza di (*):

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$$

Infine, l'applicazione $A \rightarrow P(A|B) \in [0,1]$ è una probabilità:

$$1) P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

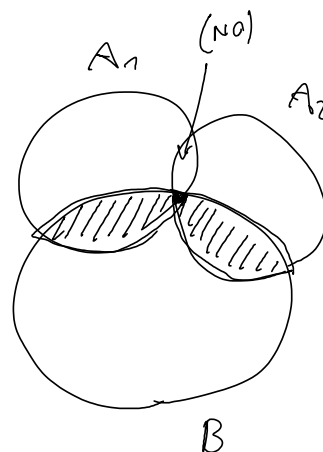
2) se A_1 e A_2 disgiunti, allora

$$P(A_1 \cup A_2|B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} \quad (\text{un. disgi.}) =$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$



Formula della probabilità totale

Supponiamo di avere un evento B e $A_i, i=1, \dots, n$ tali che siano disgiunti, non trascurabili e t.c. $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

(mutualmente esclusivi)

allora

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i) P(A_i)$$

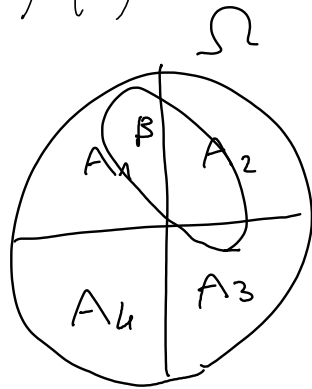
$$\text{DIM: } B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i) \text{ disj.} \Rightarrow$$

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i) P(A_i)$$

esempio: ^{2.14} esp. aleatorio: estraiamo un individuo a caso

$$B = \{ \text{individuo malato} \}$$

$$A = \{ \text{ind. lavora nella fabbrica} \}$$



$$P(B | A) = 9,7\% = 0,0097$$

$$P(B | A^c) = 1,6\% = 0,0016$$

$$P(A) = 19\% = 0,19$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B | A) P(A) + P(B | A^c) P(A^c) = \\ &= 0,0097 \times 0,19 + 0,0016 \times (1 - 0,19) = 0,0032 \\ &= 3,2\% \end{aligned}$$

Formula di Bayes

Supponiamo di sapere $P(A | B)$ ma di voler calcolare

$P(B | A)$, con A e B non trascurabili. Allora

$$P(B | A) = \frac{P(A | B) P(B)}{P(A)}$$

$$\text{DIM: } P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Basta dividere per $P(A)$ e si ha:

$$\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = P(B|A)$$

Se non conosciamo $P(A)$ ma conosciamo $P(A|B_i)$, con (B_i) che soddisfanno le ipotesi della formula della probabilità totale, allora

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

esempio 2.15:
 $A = \{\text{individuo malato}\}$
 $B = \{\text{test positivo}\}$

$$P(B|A) = 79\% = 0,79 \quad P(B^c|A^c) = 68\% = 0,68$$

$$P(A) = 20\% = 0,2$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0,79 \times 0,2}{P(B)} = \frac{0,79 \times 0,2}{0,41} = 0,39$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \\ &= 0,79 \times 0,2 + (1 - P(B^c|A^c))(1 - P(A)) = \\ &= 0,79 \times 0,2 + 0,32 \times 0,8 = 0,41 \end{aligned}$$

esercizio 2.10

$$A_1 := \{ \text{babine } a < 2 \text{ Km} \}$$

$$A_2 := \{ \text{babine tra } 2-5 \text{ Km} \}$$

$$A_3 := \{ \text{babine } a > 5 \text{ Km} \}$$

$$B := \{ \text{babine morte} \}$$

$$P(B|A_1) = \frac{50}{100'000}, \quad P(B|A_2) = \frac{20}{100'000}, \quad P(B|A_3) = \frac{5}{100'000}$$

$$P(A_1) = 5\% = 0,05 \quad P(A_2) = 15\% = 0,15 \quad P(A_3) = 80\% = 0,8$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(B|A_i) P(A_i) =$$

$$= \frac{50}{100'000} \times 0,05 + \frac{20}{100'000} \times 0,15 + \frac{5}{100'000} \times 0,8 =$$

$$= \frac{9,5}{100'000} = 9,5 \cdot 10^{-5}$$