INDIPENDENZA

Se due eventi A e B, con B non trascurabile, sono t.c

(*) $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$

si dice che A è <u>indipendente</u> da B

<u>esempio</u>: lancio di due dadi

$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2 = \{(i, j) \mid i, j = 1, \dots, 6\}$

$\mathbb{P}$ uniforme

$A := \{\text{primo dado pari}\} = \{(i,j) \in \Omega \mid i = 2, 4, 6\}$

$B := \{\text{secondo dado} = 6\} = \{(i,j) \in \Omega \mid j = 6\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)$$

Da (*) segue

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \text{, quindi}$$

$(**)\quad \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$

Ridefiniamo l'indipendenza tra A e B dicendo che A e B sono indipendenti fra loro se verificano $(**)$

Vantaggi rispetto a $(*)$:

1) $(**)$ è ben definita anche se A o B sono trascurabili;

2) è simmetrica in A e B

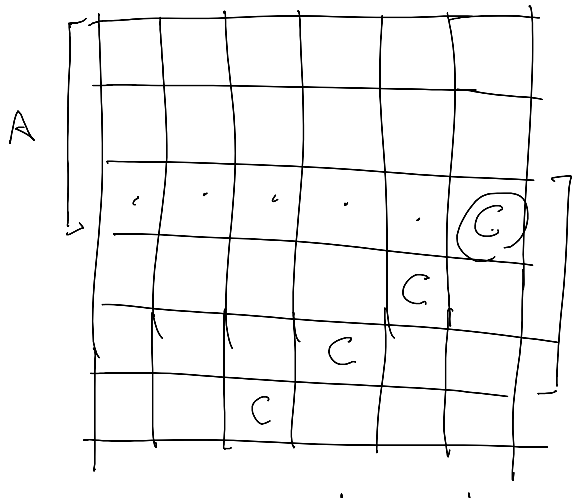
Se vogliamo estendere la definizione di indipendenza a più di 2 eventi,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n)$$

(nota su $\prod$: $K! = 1 \times 2 \times \dots \times K = \prod_{i=1}^{K} i$)

non basta! Bisogna che la cosa sia verificata anche su ogni sottofamiglia di $(A_i)_{i=1,\dots,n}$

esempio: $\Omega = \{1, \dots 6\}^2$, $\mathbb{P}$ uniforme



$A = \{(i,j) \mid i = 1,2,3\}$

$B = \{(i,j) \mid i = 3,4,5\}$

$C = \{(i,j) \mid i+j = 9\}$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

$\Rightarrow$ i 3 eventi non sono indipendenti, MA:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

La definizione generale di indipendenza per n eventi $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ é la seguente: $\forall J \subseteq \{1, \dots, n\}$, $(|J| \geq 2)$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Indipendenza di variabili aleatorie

Consideriamo $X_1, \dots, X_n$ v.al. a valori rispettivamente in $E_1, \dots, E_n$. Diciamo che $X_1, \dots, X_n$ sono <u>indipendenti</u> se

$\forall A_1 \subseteq E_1, \dots, A_n \subseteq E_n$,

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n\} = \prod_{1}^{n} {}_i\, \mathbb{P}\{X_i \in A_i\}$$

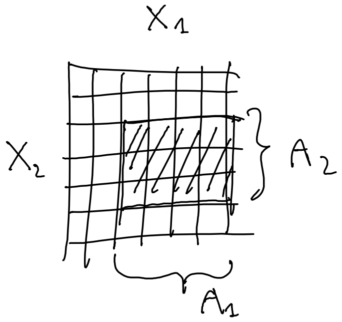
cioé se gli eventi $\{X_i \in A_i\}$ sono indipendenti $\forall A_i \in E_i$

<u>esempio</u>: $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, $\mathbb{P}$ uniforme

definiamo $X_1(i,j) = i$, $X_2(i,j) = j$ (a val. in $E = \{1, 2, \dots, 6\}$)

Allora X_1 e X_2 sono indipendenti: $\forall A_1, A_2 \subseteq E$,

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2\} = \mathbb{P}\{(i,j) \in A_1 \times A_2\} = \mathbb{P}(A_1 \times A_2) =$$



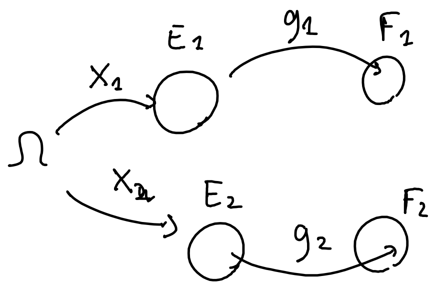
$$= \frac{|A_1 \times A_2|}{|\Omega|} = \frac{|A_1| \times |A_2|}{|\Omega|} = \frac{|A_1| \times |A_2|}{6 \times 6}$$

$$= \frac{|A_1|}{6} \times \frac{|A_2|}{6} = \mathbb{P}\{X_1 \in A_1\}\, \mathbb{P}\{X_2 \in A_2\}$$

<u>nota</u>: se X_i v.al. a valori in E_i, $i = 1, \dots, n$, e $g_i : E_i \to F_i$ allora $g_i(X_i)$ sono v.al. a valori in F_i

Se $X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti, allora anche $g_i(X_i)$ sono ind.

Difatti, $\forall A_i \in F_i$, $i = 1, \dots, n$:



$$\mathbb{P}\{g_1(X_1) \in A_1, \dots, g_n(X_n) \in A_n\} =$$

$$= \mathbb{P}\{X_1 \in g_1^{-1}(A_1), \dots, X_n \in g_n^{-1}(A_n)\} =$$

$$= \prod_1^n{}_i\, \mathbb{P}\{X_i \in g_i^{-1}(A_i)\} = \prod_1^n{}_i\, \mathbb{P}\{g_i(X_i) \in A_i\}$$

Variabili aleatorie binomiali

Supponiamo di avere $X_1, \dots, X_n$ indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) $\sim Be(p)$; siamo interessati alla legge di

$$S_n := \sum_1^n{}_i\, X_i$$

S_n è v.al. a valori in $\{0, \dots, n\}$: $\forall K = 0, \dots, n$,

$\mathbb{P}\{S_n = K\} = ?$

$\dots \{\omega \mid X_i = 0\ \forall i = 1, \dots, n\} = \mathbb{P}\left(\bigcap_1^n{}_i \{X_i = 0\}\right) =$

$$\mathbb{P}\{S_n = 0\} = \mathbb{P}\{X_i = 0 \ \forall\, i = 1, \dots, n\} = \mathbb{P}\left(\bigcap_1^n{}_i \{X_i = 0\}\right) =$$

$$= \prod_1^n{}_i \mathbb{P}\{X_i = 0\} = \prod_1^n{}_i (1-p) = (1-p)^n$$

$$\mathbb{P}\{S_n = n\} = \mathbb{P}\left\{\left(\bigcap_1^n{}_i \{X_i = 1\}\right)\right\} = \prod_1^n{}_i \mathbb{P}\{X_i = 1\} = \prod_1^n{}_i p = p^n$$

$$\mathbb{P}\{S_n = 1\} = \mathbb{P}\{\exists\, i = 1, \dots n \text{ t.c. } X_i = 1,\ X_j = 0 \ \forall\, j \neq i\} =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_1^n{}_i \{X_i = 1,\ X_j = 0 \ \forall\, j \neq i\}\right) = (\text{disg.})$$

$$= \sum_1^n{}_i \mathbb{P}\{X_i = 1,\ X_j = 0 \ \forall\, j \neq i\} = \sum_1^n{}_i p(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}$$

allo stesso modo

$$\mathbb{P}\{S_n = n-1\} = n\, p^{n-1}(1-p)$$

In generale,

$$\mathbb{P}\{S_n = K\} = \mathbb{P}\{\exists\, J \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ t.c. } |J| = K,\ X_j = 1 \ \forall\, j \in J,$$

$$X_j = 0 \ \forall\, j \notin J\} =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{J \subseteq \{1, \dots n\} \\ |J| = K}} \{X_j = 1 \ \forall\, j \in J,\ X_j = 0 \ \forall\, j \neq J\}\right) = (\text{disg.})$$

$$= \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots n\} \\ |J| = K}} \mathbb{P}\{X_j = 1 \ \forall\, j \in J,\ X_j = 0 \ \forall\, j \neq J\} =$$

$$= \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots n\} \\ |J| = K}} p^K (1-p)^{n-K} = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

$\binom{n}{K}$ (coefficiente binomiale) = n° di sottoinsiemi di K elementi di un insieme di n elementi

elementi di un insieme di n elementi

$$= \frac{n!}{K!(n-K)!} \qquad \left(\underline{\underline{\text{nota}}}:\ 0! := 1\right) \qquad K! = 1 \times 2 \times \ldots \times K = \prod_{i=1}^{K} i$$

$\binom{n}{K}$ compare nella potenza di un binomio

$$(a+b)^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} a^K b^{n-K}$$

$$(a+b)^2 = a \times a + b \times a + a \times b + b \times b = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$= \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2$$

Questo ci permette di verificare che:

$$\sum_{K=0}^{n} \mathbb{P}\{S_n = K\} = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} = \left(p + (1-p)\right)^n = 1^n = 1$$

<u>esercizio 2.7</u>

$$n = 6\ ;\quad X_i\ ,\ i = 1, \ldots, 6,\ \text{i.i.d.} \sim Be\left(\frac{1}{2}\right) \ \text{t.c.} \qquad \left(p = \frac{1}{2}\right)$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esimo figlio è maschio} \\ 0 & \text{-- -- -- femmina} \end{cases}$$

$$S_6 = \sum_{i=1}^{6} X_i \qquad \text{n° di figli maschi}$$

$$\mathbb{P}\{S_6 = 0\} = \binom{6}{0} p^0 (1-p)^6 = \frac{\cancel{6!}}{\underset{1}{\cancel{0!}}\,\cancel{(6-0)!}} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{64} =$$

$$= \frac{1}{64} = 0{,}015625$$

$$\mathbb{P}\{S_6 = 1\} = \binom{6}{1} p^1 (1-p)^5 = \overset{6}{\cancel{6!}} \ldots \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 6\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}09375$$

$$\mathbb{P}\{S_6 = 1\} = \binom{6}{1} p^1 (1-p)^5 = \frac{\overset{6}{\cancel{6!}}}{1!\,\cancel{5!}} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}09375$$

$$\mathbb{P}\{S_6 = 2\} = \binom{6}{2} p^2 (1-p)^4 = \frac{6!}{2!\,4!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 =$$

$$= 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}234375$$

$$\mathbb{P}\{S_6 = 3\} = \binom{6}{3} p^3 (1-p)^3 = \frac{6!}{3!\,3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot \cancel{6}}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3}} \left(\frac{1}{2}\right)^6 =$$

$$= 20 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}3125$$

$$\mathbb{P}\{S_6 = 4\} = \binom{6}{4} p^4 (1-p)^2 = \frac{6!}{4!\,2!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}234375$$

$$\mathbb{P}\{S_6 = 5\} = \binom{6}{5} p^5 (1-p)^1 = \frac{6!}{5!\,1!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0{,}09375$$

$$\mathbb{P}\{S_6 = 6\} = \binom{6}{6} p^6 (1-p)^0 = \frac{6!}{6!\,0!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0{,}015625$$