

VARIABILE ALEATORIA t DI STUDENT

Supponiamo di avere due campioni $X_1, \dots, X_{n_1} \sim N(\mu_x, \sigma^2)$ e $Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim N(\mu_y, \sigma^2)$, indipendenti fra loro. Allora

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma^2}{n_1}\right)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i \sim N\left(\mu_y, \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$$

allora, sotto $H_0: \mu_x = \mu_y$, $\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$

Costruiamo anche

$$S_{\bar{X} - \bar{Y}} = \sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}$$

Allora

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_{\bar{X} - \bar{Y}}}$$

non dipende da μ_x, μ_y sotto H_0 . In realtà, sotto H_0 , non dipende nemmeno da σ . Difatti, se rappresentiamo

$$X_i = \sigma Z_i + \mu_x \quad \text{con} \quad Z_i \sim N(0, 1)$$

$$Y_i = \sigma W_i + \mu_y \quad \text{con} \quad W_i \sim N(0, 1)$$

ca $(Z_i)_i, (W_i)_{i=1, \dots, n_2}$ indipendenti fra loro. Allora

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (\sigma Z_i + \mu_x) = \sigma \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} Z_i + \mu_x = \sigma \bar{Z} + \mu_x$$

$$\bar{y} = \sigma \bar{w} + \mu_y$$

$$\bar{X} - \bar{Y} = \sigma(\bar{Z} - \bar{W}) + \mu_X - \mu_Y$$

$$\text{of } H_0, \quad \bar{X} - \bar{Y} = \sigma(\bar{Z} - \bar{W})$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (\sigma Z_i + \cancel{\mu_X} - \sigma \bar{Z} - \cancel{\mu_X})^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (Z_i - \bar{Z})^2 = \sigma^2 S_Z^2$$

$$S_y^2 = \sigma^2 S_w^2$$

$$s_{\bar{x} - \bar{y}} = \sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2 s_z^2}{n_1} + \frac{\sigma^2 s_w^2}{n_2}} = \sigma \sqrt{\frac{s_z^2}{n_1} + \frac{s_w^2}{n_2}} = \sigma s_{\bar{z} - \bar{w}}$$

Quindi, sotto H_0 ,

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X} - \bar{Y}}} = \frac{\sigma(\bar{Z} - \bar{W})}{\sigma s_{\bar{Z} - \bar{W}}} = \frac{\bar{Z} - \bar{W}}{s_{\bar{Z} - \bar{W}}}$$

non dipende neanche da σ , ma solo da n_1, n_2 .

Si può dimostrare che dipende solo da $n_1 + n_2 - 2 = V$

Si può dimostrare che
(grado di libertà) e che, fissato un livello α , la
funzione $\nu \rightarrow t_\alpha(\nu)$ è decrescente, e $\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\alpha(\nu) = q_\alpha$
con q_α quantile di livello α di una $N(0,1)$
($t(\nu)$ converge in legge a $N(0,1)$)