

TEST t ACCOPPIATO

Supponiamo di avere due campioni $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Supponiamo che X_i, Y_j siano indip. $\forall i \neq j$, ma che X_i, Y_i non siano indipendenti.

(la situazione tipica è quella in cui si sottopone un campione di individui ad un trattamento, e $X_1, \dots, X_n$ è una misurazione prima del trattamento e $Y_1, \dots, Y_n$ dopo).

Vogliamo fare un test con $H_0: \mu_X = \mu_Y$ e $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$.

Come fare?

Vediamo che $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ non sono indip.,
NON possiamo usare il test t sulla differenza di medie.

Idea: analizziamo le differenze $Z_i := Y_i - X_i$:
se supponiamo che Z_i siano gaussiane, allora

$$E[Z_i] = E[Y_i] - E[X_i] = \mu_Y - \mu_X \stackrel{=:\mu_Z}{=} \mu_Z, \text{ quindi supponiamo}$$

$$\text{che } Z_1, \dots, Z_n \text{ i.i.d.} \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$$

con $\mu_Z = \mu_Y - \mu_X$. Allora possiamo riscrivere H_0 e H_1

come $H_0: \mu_Z = 0$ e $H_1: \mu_Z \neq 0$. Per effettuare il test, procediamo come in un test sulla media:

$$t = \frac{\bar{Z} - 0}{s_{\bar{Z}}}$$

Y sotto H_0 , t ha legge $t(\nu)$ con $\nu = n - 1$.

Regola decisionale:

- se $|t| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$, accetta $H_0: \mu_Z = 0$ (cioè $\mu_X = \mu_Y$)
- se $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$, rifiuta H_0 e accetta $H_1: \mu_Z \neq 0$ (cioè $\mu_X \neq \mu_Y$)

esercizio 4.3

1) $n = 20$, $\bar{X} = 3500$, $s_x = 500$

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$t = 2,73 : \mu_0 = ?$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_{\bar{X}}} = 2,73 \Rightarrow$$

$$\bar{X} - \mu_0 = 2,73 \cdot s_{\bar{X}}$$

$$\mu_0 = \bar{X} - 2,73 \cdot s_{\bar{X}}$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \frac{500}{\sqrt{20}} = 111,8$$

$$\mu_0 = \bar{X} - 2,73 \cdot s_{\bar{x}} = 3500 - 2,73 \cdot 111,8 = 3194,78$$

$$2) \nu = 20 - 1 = 19$$

$$t_{0,99}(19) = 2,539 < |t| = 2,73 < 2,861 = t_{0,995}(\nu)$$

$\uparrow$ $\alpha = 0,02$
 $\uparrow$ $\alpha = 0,01$

$$0,01 < P < 0,02$$

esercizio 7.3 1) la procedura di test giusta è quella del test accoppiato: si chiamano X_i il peso riportato dall' i -esimo paziente e Y_i il peso misurato sullo stesso paziente, e $Z_i = Y_i - X_i$ (col. 4), allora vogliamo fare il test $H_0: \mu_Z = 0$ e $H_1: \mu_Z \neq 0$

$$2) \bar{Z} = -2,5, s_Z^2 = 10,27 \quad (\alpha = 0,05)$$

$$s_{\bar{Z}} = \sqrt{\frac{s_Z^2}{n}} = \sqrt{\frac{10,27}{10}} = 1,0134$$

$$t = \frac{\bar{Z} - 0}{s_{\bar{Z}}} = \frac{-2,5}{1,01} = -2,46$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{-2,46}{1,01} = -2,46$$

$$\nu = n - 1 = 9$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu) = t_{0,975}(9) = 2,262$$

$$|t| = 2,46 > 2,26 \Rightarrow H_0 \text{ rifi. } H_1 \text{ acc.}$$

$$t_{0,975}(9) = 2,262 < |t| = 2,46 < 2,821 = t_{0,99}(9)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\alpha = 0,05$ 0,02

$$\Rightarrow 0,02 < P < 0,05$$