

TEST χ^2 DI ADATTAMENTO

venerdì 30 maggio 2014 09.47

Supponiamo di avere un campione $X_1, \dots, X_n$ con una certa distribuzione, e vogliamo effettuare il test con ipotesi "il campione segue una certa distribuzione di riferimento" e alternativa contraria.

Vi sono vari casi, a seconda delle distribuzioni che si vuole testare.

1) caso Bernoulli: $p_x = p$ $p_x \neq p$
 $H_0: X \sim \text{Be}(p)$, $H_1: X \not\sim \text{Be}(p)$

$$\hat{p}_x := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \approx N\left(p_x, \frac{p_x(1-p_x)}{n}\right)$$

se "n grande", cioè $n\hat{p}_x > 5$ e $n(1-\hat{p}_x) > 5$. In questo caso,

$$Z = \frac{\hat{p}_x - p}{S_{\hat{p}}} \approx N(0, 1) \text{ sotto } H_0$$

$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}}, \text{ oppure } S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ sotto } H_0 \text{ nota}$$

regola: $\bullet$ se $|Z| < q_{1-\frac{\alpha}{2}}$, accetto H_0
(o a fisso) $\bullet$ se $|Z| \geq q_{1-\frac{\alpha}{2}}$, rifiuto H_0 e accetto H_1

nota: possiamo anche avere test unilaterali

$$H_0: p_x \geq p \quad H_1: p_x < p$$

oppure usare le tecniche degli intervalli di confidenza:

$I_{1-\alpha}$ per p_x : estremi $\hat{p} \pm q_{1-\frac{\alpha}{2}} s_{\hat{p}}$

in caso del test $H_0: p_x = \bar{p}$, $H_1: p_x \neq \bar{p}$:

- se $\bar{p} \in I_{1-\alpha}$, accetto H_0
- se $\bar{p} \notin I_{1-\alpha}$, rifiuto H_0 e accetto H_1

2) caso finito: X assume valori in E , con E finito

$ E = c$	
classe	$x_1 \quad \dots \quad x_c$
(#val. di X_i)	$O_1 \quad \dots \quad O_c$
	tot
	n

vogliamo fare un test $H_0: P\{X = x_i\} = p_i \forall i$,

$H_1: P\{X = x_i\} \neq p_i$ per qualche i

Il test si può fare in 2 modi (numeri $\leftrightarrow$ proporzioni)

1) trovare numeri attesi: $E_i = p_i \cdot n \quad \forall i = 1, \dots, c$

se $E_i > 5$, "n grande", e costruiamo

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^c \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \approx \chi^2(\nu) \text{ sotto } H_0$$

$\nu = c - 1$; regola:

- se $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(\nu)$, accetto H_0
- se $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(\nu)$, rifiuto H_0 e acc. H_1

2) trovare proporzioni osservate:

c) testare ipotesi

$$\hat{p}_i = \frac{O_i}{n} \quad (\text{proporzioni empiriche})$$

se "n grande", cioè $p_i \cdot n > 5 \quad \forall i$, allora

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^c \frac{(\hat{p}_i - p_i)^2}{p_i} \approx \chi^2(\nu) \text{ sotto } H_0$$

con $\nu = c - 1$; regola uguale al p.to ①

esempio: esercizio 8.4

AB	Ab	aB	ab
9/16	3/16	3/16	1/16

osservazioni $n = 560$

327	118	90	25
-----	-----	----	----

$H_0: P\{X = x_i\} = p_i, (\text{con } x_i = AB, Ab, aB, ab) \quad \forall i=1, \dots, 4$

$H_1: P\{X = x_i\} \neq p_i \text{ per q. de } i$

numeri attesi: $560 \times \frac{9}{16} = 315 = E_1$

$$560 \times \frac{3}{16} = 105 = E_2 = E_3$$

$$560 \times \frac{1}{16} = 35 = E_4$$

$E_i > 5 \Rightarrow \text{test } \chi^2$

$$\chi^2 = \frac{(327 - 315)^2}{315} + \frac{(118 - 105)^2}{105} + \frac{(90 - 105)^2}{105} + \frac{(25 - 35)^2}{35} =$$

$$= 7,07$$

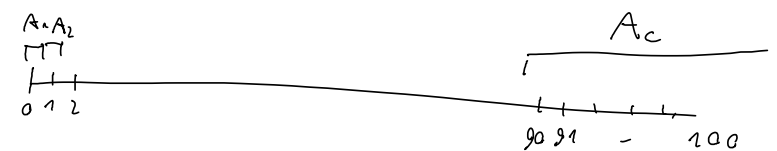
cerchiamo valore P : $\nu = 3$

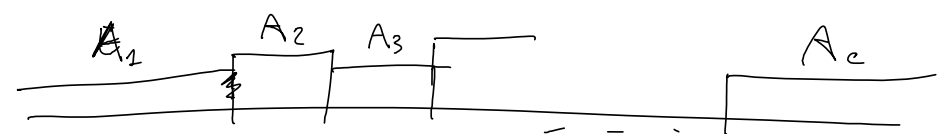
$$\chi^2_{0,95}(3) = 7,815 > \chi^2 \Rightarrow P > 0,05$$

accettiamo H_0

3) (se $E_i < 5$ per qualche i) se X a val. in E , $|E| = \infty$:

si suddivide E in $A_1, \dots, A_c$ ^{disgi.} t.c. $\bigcup_{i=1}^c A_i = E$

es. $E = \{1, \dots, 100\}$ 

es. $E = \mathbb{R}$ 

a questo punto, se $H_0: X \sim \text{distrib.}$ $H_1: X \not\sim \text{distrib.}$

numeri osservati: $O_i = \# \{X_j \in A_i\}$

proporz. attese: $p_i = P_0 \{X \in A_i\}$

numeri attesi: $E_i = n \cdot p_i$

il test χ^2 si può fare se $E_i > 5 \forall i$, quindi questo ci impone di scegliere le $A_i, i = 1, \dots, c$ in modo che questo succeda.

A questo punto si può fare il test χ^2 .

base di legge nota a meno di parametri

Se la legge che si vuole testare è nota, ma dipende da parametri che non sono noti, si può decidere di usare delle stime per questi parametri. Allora è tutto come prima, tranne che i gradi di libertà della χ^2 sono

$$V = C - 1 - l$$

con $l = \text{n° di parametri per cui usiamo una stimatore.}$

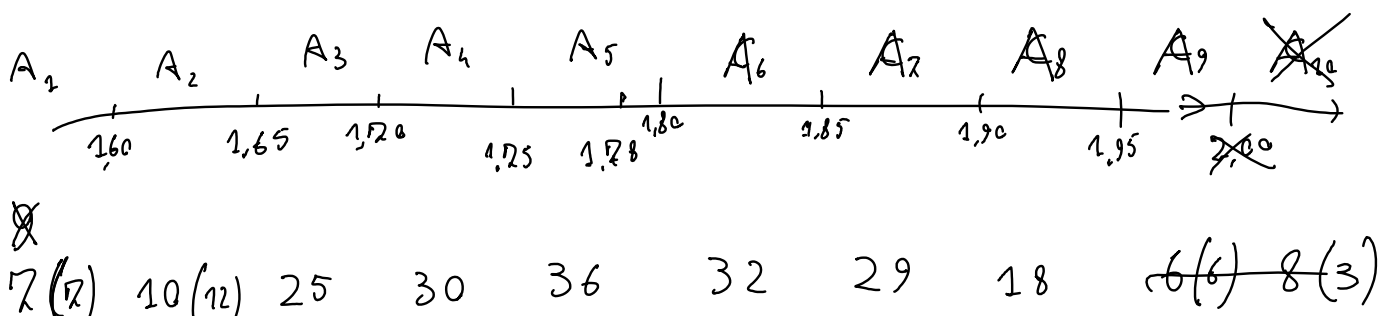


esempio: lab. fisica, pendolo

$$n = 202, \quad \bar{T} = 1,78 \text{ s}, \quad S_T^2 = 0,01$$

$$S_T = 0,1$$

prova a fare $C = 10$ classi:



14(9)

$$E_j = IP\{X \in A_j\} \quad \text{c.} \quad X \sim N(1,78; 0,01)$$

$$P_1 = IP\{X < 1,60\} = IP\left\{\frac{X - 1,78}{0,1} \leq \frac{1,60 - 1,78}{0,1}\right\} =$$

$$= IP\left\{\underset{\sim N(0,1)}{Z} \leq -1,8\right\} = IP\{Z \geq 1,8\} = 1 - IP\{Z \leq 1,8\} =$$

$$= 1 - 0,96407 = 0,03593 \quad E_1 = 202 \times 0,03593 \approx 7$$

$$P_2 = IP\{1,60 \leq X \leq 1,65\} = IP\left\{\frac{1,60 - 1,78}{0,1} \leq \frac{X - 1,78}{0,1} \leq \frac{1,65 - 1,78}{0,1}\right\}$$

$$= IP\{-1,8 < Z < -1,3\} = IP\{1,3 < Z < 1,8\} =$$

$$= F_2(1,8) - F_2(1,3) = 0,96407 - 0,90320 = 0,06087$$

$$E_2 = 202 \times p_2 \approx 12$$

... fino a

$$P_3 = IP\{1,95 < X < 2,00\} = IP\left\{\frac{1,95 - 1,78}{0,1} \leq \frac{X - 1,78}{0,1} \leq \frac{2 - 1,78}{0,1}\right\}$$

$$= IP\{1,7 \leq X \leq 2,2\} = F_2(2,2) - F_2(1,7) =$$

$$= 0,98610 - 0,95543 = 0,03067$$

$$E_3 = 202 \times p_3 \approx 6$$

$$P_{10} = IP\{X > 2,00\} = IP\left\{\frac{X - 1,78}{0,1} > \frac{2,00 - 1,78}{0,1}\right\} =$$

$$= IP\{Z > 2,2\} = 1 - F_2(2,2) = 1 - 0,98610 = 0,0139$$

$$E_{10} = 202 \times p_{10} = 2,78 < 5$$