

Intervalli di confidenza per proporzioni e differenze di proporzioni

giovedì 14 maggio 2015 09.27

Supponiamo di avere un campione $X_1, \dots, X_n \sim \text{Be}(p)$ e di volerci ricavare un intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha$, cioè un intervallo $I_{1-\alpha}$ t.c.

$$P\{p \in I_{1-\alpha}\} = 1 - \alpha$$

Se "n è grande", sappiamo che

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{s_{\hat{p}}} \approx N(0, 1)$$

dove $s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. Allora

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\{|Z| < q_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = P\left\{-q_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{p} - p}{s_{\hat{p}}} < q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = \\ &= P\left\{-q_{1-\frac{\alpha}{2}} s_{\hat{p}} < \hat{p} - p < q_{1-\frac{\alpha}{2}} s_{\hat{p}}\right\} = \\ &= P\left\{q_{1-\frac{\alpha}{2}} s_{\hat{p}} > p - \hat{p} > -q_{1-\frac{\alpha}{2}} s_{\hat{p}}\right\} = \\ &= P\left\{\hat{p} - q_{1-\frac{\alpha}{2}} s_{\hat{p}} < p < \hat{p} + q_{1-\frac{\alpha}{2}} s_{\hat{p}}\right\} \end{aligned}$$

quindi $I_{1-\alpha}$ ha estremi $\hat{p} \pm s_{\hat{p}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}$

L'intervallo di confidenza può essere usato per test di ipotesi:

$$H_0: p = p_0 \quad H_1: p \neq p_0$$

Con gli stessi passaggi del caso della media di gaussiana, si arriva

- se $p_0 \in I_{1-\alpha}$, accetto H_0
- se $p_0 \notin I_{1-\alpha}$, rifiuto H_0 e accetto H_1

Se abbiamo due campioni di Bernoulli $X_1, \dots, X_{n_1} \sim \text{Be}(p_x)$
e $Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim \text{Be}(p_y)$, allora l'intervallo di confidenza
per $p_x - p_y$ è di estremi $\hat{p}_x - \hat{p}_y \pm s_{\hat{p}_x - \hat{p}_y} q_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Anche qui si può usare $I_{1-\alpha}$ per test di ipotesi

$$H_0: p_x = p_y$$

$$H_1: p_x \neq p_y$$

regole:

- se $0 \in I_{1-\alpha}$, accetto H_0
- se $0 \notin I_{1-\alpha}$, rifiuto H_0 e accetto H_1

Esercizio 8.1

(follisto)

	sì	NO	TOT
medico	43	36	79
chirurgico	53	19	72

$$H_0: p_n = p_c$$

$$H_1: p_n \neq p_c$$

$$\wedge \quad 43$$

$$\wedge \quad 53 - n \quad 726$$

$$\hat{p}_n = \frac{43}{79} = 0,544 \quad \hat{p}_c = \frac{53}{72} = 0,736$$

$$S_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)}{79} + \frac{\hat{p}_c(1 - \hat{p}_c)}{72}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0,544 \times 0,456}{79} + \frac{0,736 \times 0,264}{72}} = 0,0764$$

$$q_{0,995} = 2,57$$

$$I_{0,99} \text{ he este: } \hat{p}_n - \hat{p}_c \pm q_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot S_{\hat{p}_n - \hat{p}_c} = 0,544 - 0,736 \pm$$

$$\pm 2,57 \times 0,0764 = -0,192 \pm 0,196$$

$$I_{0,99} = [-0,388; +0,004]$$

$$0 \in I_{0,99} \Rightarrow \text{accepte } H_0$$