LEGGE DEI COEFFICIENTI DELLA RETTA DI REGRESSIONE

Supponiamo ora che le X_i, $i = 1, \dots, n$ non siano aleatorie. Allora b_0, b_1 hanno leggi gaussiane.

$$b_1 = \frac{S_{XY}}{S_X^2} = \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2} \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2_{Y|X}}{(n-1)\, s_X^2}\right)$$

(ricordiamo che $Y_i = \beta_1 X_i + \beta_0 + \varepsilon_i$, $(\varepsilon_i)_i$ i.i.d. $\sim N(0, \sigma^2_{Y|X})$)

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X} = \sim N\left(\beta_0, \sigma^2_{Y|X}\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{(n-1)\, s_X^2}\right)\right)$$

Da questo si ricava in particolare che b_0, b_1 sono stime corrette di β_0, β_1.

Possiamo usare le leggi di b_1, b_0 per test di ipotesi e/o per intervalli di confidenza. In entrambi i casi, il quantile "giusto" è $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$, $\nu = n-2$, e si usano gli stimatori

$$s_{b_1} = \sqrt{\frac{s^2_{Y|X}}{(n-1)\, s_X^2}} = \frac{s_{Y|X}}{s_X \sqrt{n-1}}$$ errore standard di b_1

$$s_{b_0} = \sqrt{s^2_{Y|X}\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{(n-1)\, s_X^2}\right)} = s_{Y|X}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{(n-1)\, s_X^2}}$$

errore standard di b_0

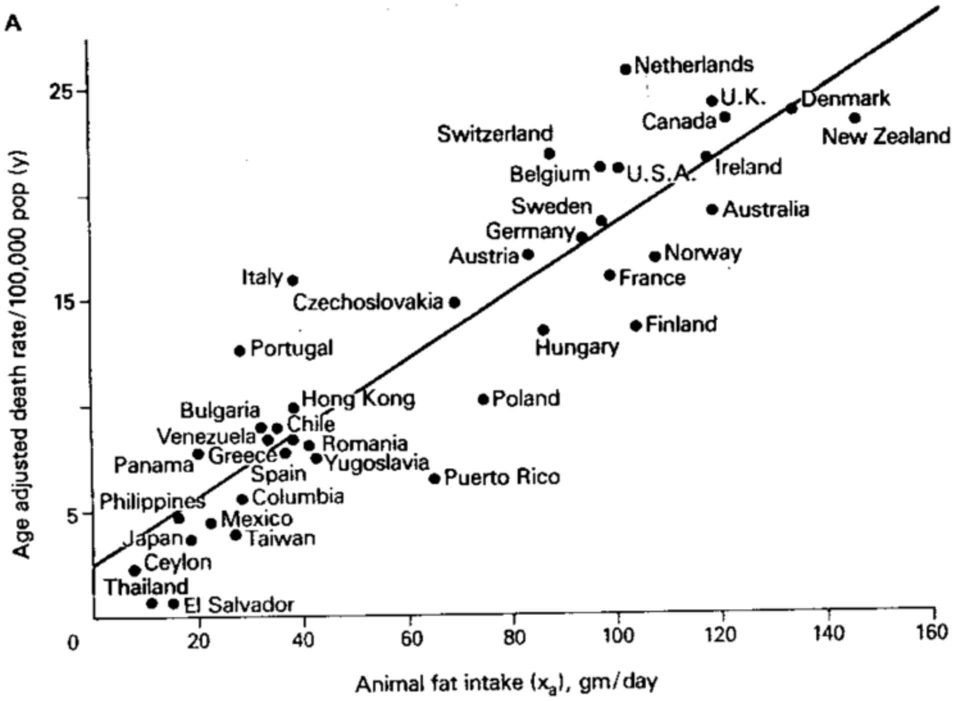
esempio: test di significatività della relazione lineare

$H_0: \beta_1 = 0 \leftarrow$ NON c'è rel. lineare

$H_1: \beta_1 \neq 0 \leftarrow$ C'È rel. lineare

$$t = \frac{b_1 - 0}{s_{b_1}} \sim t(\nu) \text{ sotto } H_0$$

- se $|t| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$, acc. H_0
- se $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$, rif. H_0 acc. H_1



retta regr.:

$y = 0{,}16\,x + 2{,}5$

$s_{b_1} = 0{,}013$

$t = \frac{b_1 - 0}{s_{b_1}} \simeq 12$

$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow$

$t_{0,995}(37) \simeq \cancel{3{,}57} < 12 \Rightarrow$ acc. $H_1: \beta_1 \neq 0$

$\simeq t_{0,995}(30) = 2{,}75$

$t_{0,999}(30) = 3{,}385 < 12$

$\Rightarrow p < 0{,}002$

oppure: $I_{1-\alpha}$ per β_1: $b_1 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\, s_{b_1}$

test:
- se $0 \in I_{1-\alpha}$, acc. H_0
- se $0 \notin I_{1-\alpha}$, rif. H_0 acc. H_1

• se $0 \notin I_{1-\alpha}$, rif. H_0 acc. H_1

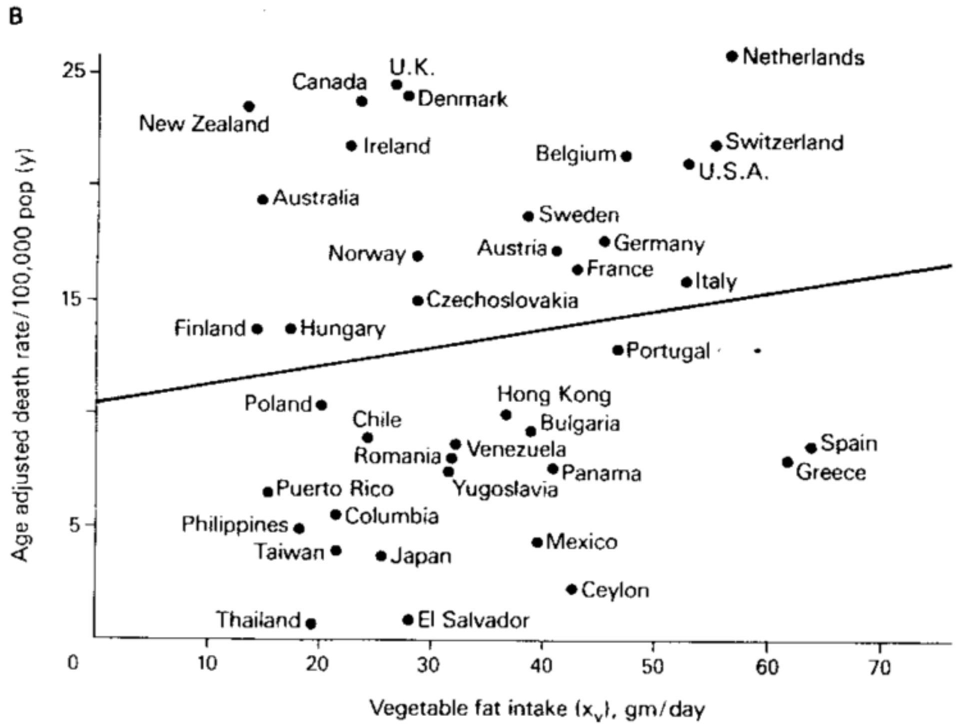
<u>esempio</u>: il grasso causa la morte per infarto?

$I_{1-\alpha}$ per β_1 di estremi: $0{,}16 \pm 0{,}013 \times 3{,}57 = 0{,}16 \pm 0{,}046$

99%

$$I_{99\%} = [0{,}114 ; 0{,}206]$$

$0 \notin I_{99\%} \Rightarrow$ rif. H_0 e acc H_1: la rel. lineare è significativa



retta regr.:

$y = 0{,}084x + 10{,}4$

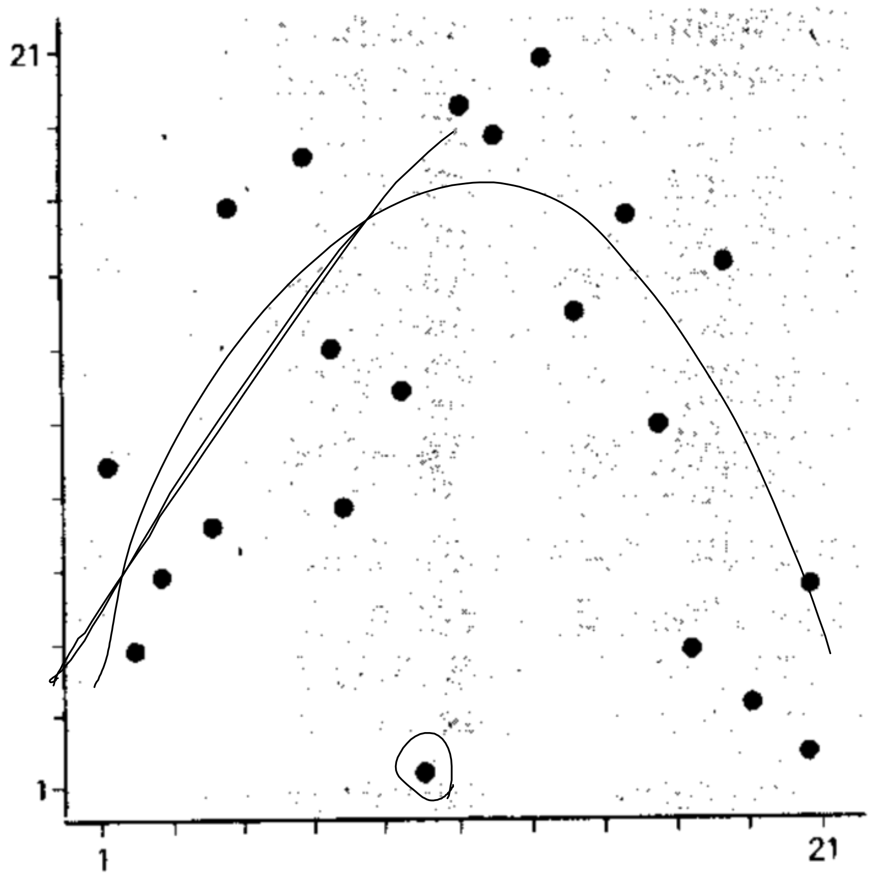
$s_{b_1} = 0{,}056$

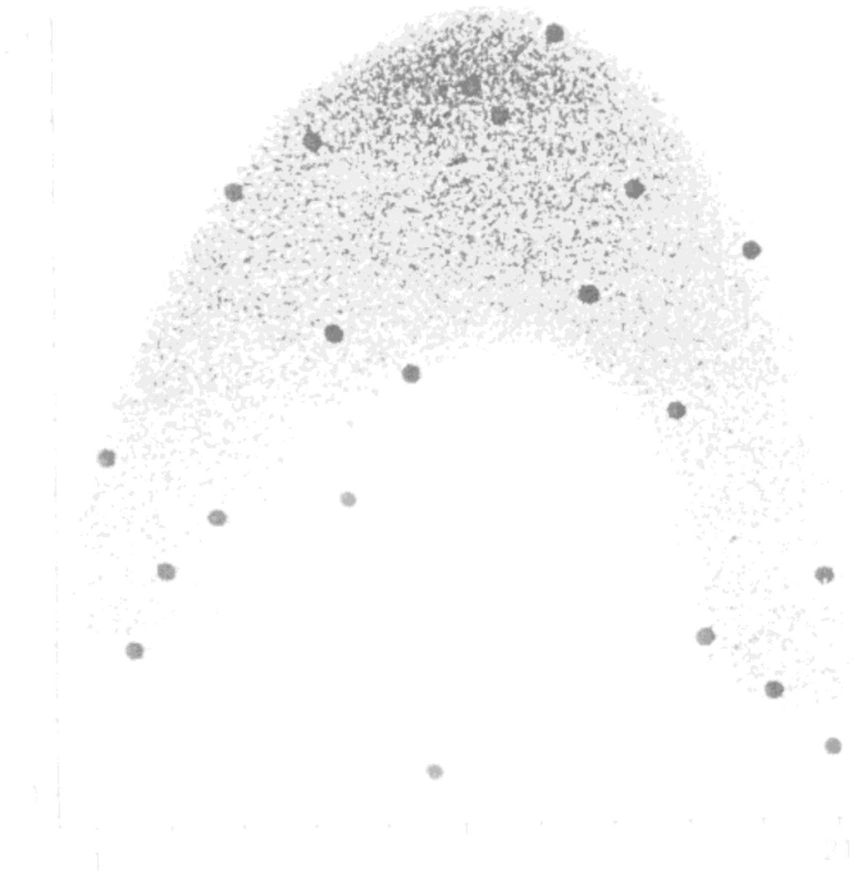
$t = \frac{b_1 - 0}{s_{b_1}} = 1{,}5$

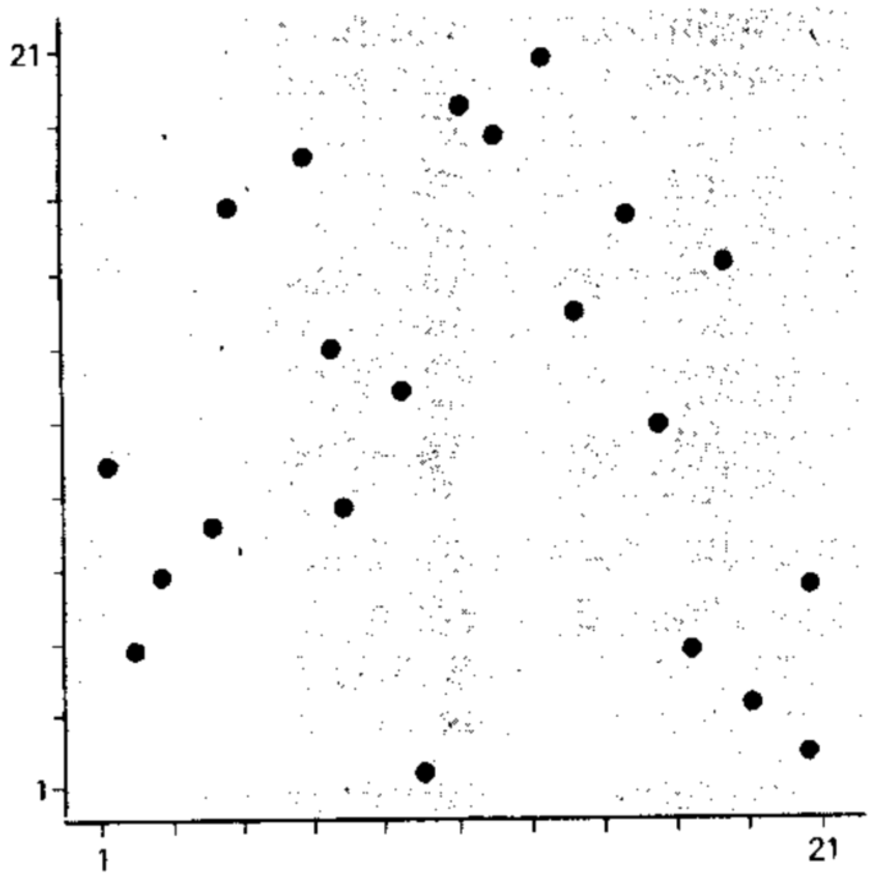
$t_{0{,}995}(37) = \cancel{3{,}57}$ 2,75

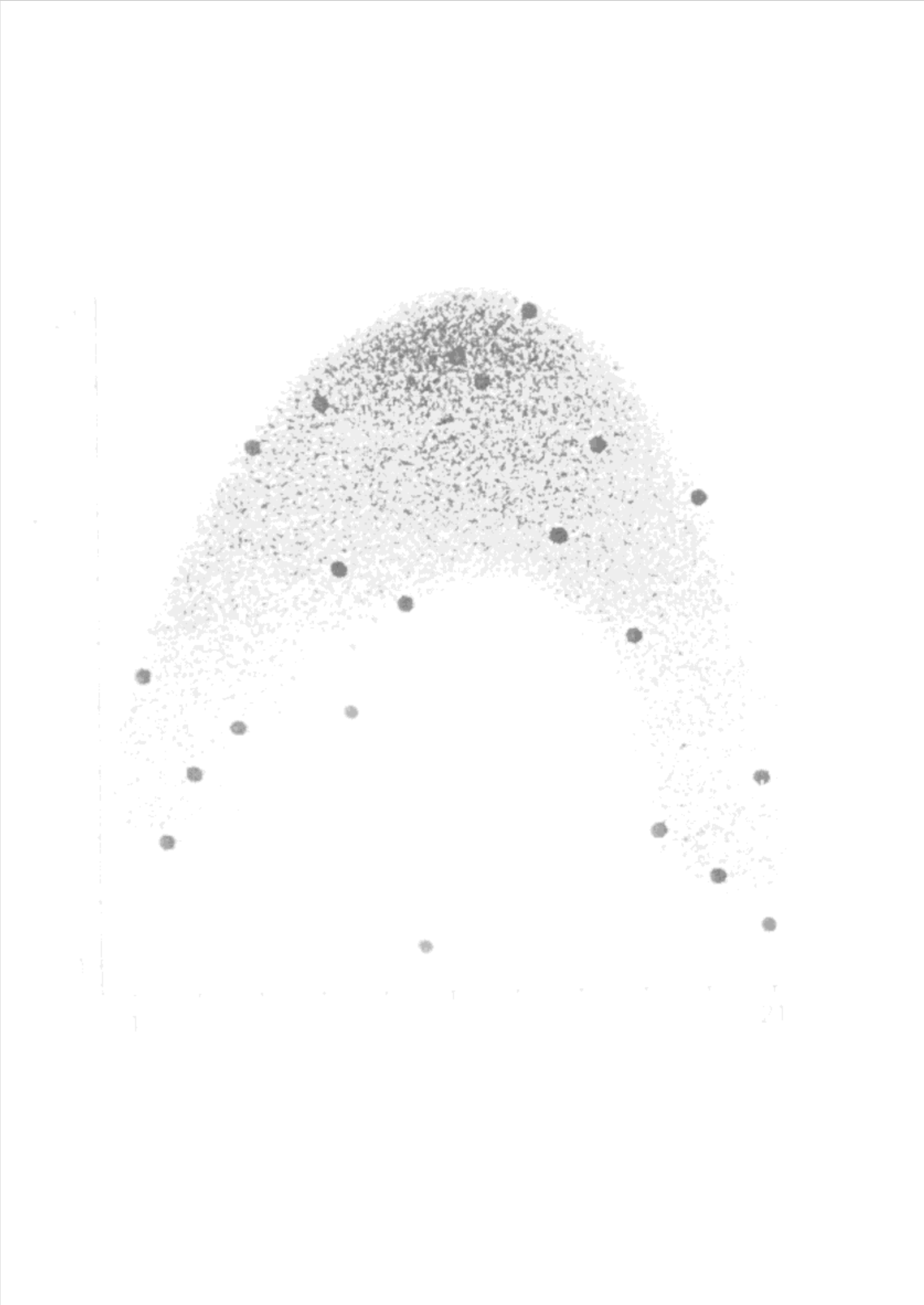
$> |t| = 1{,}5$

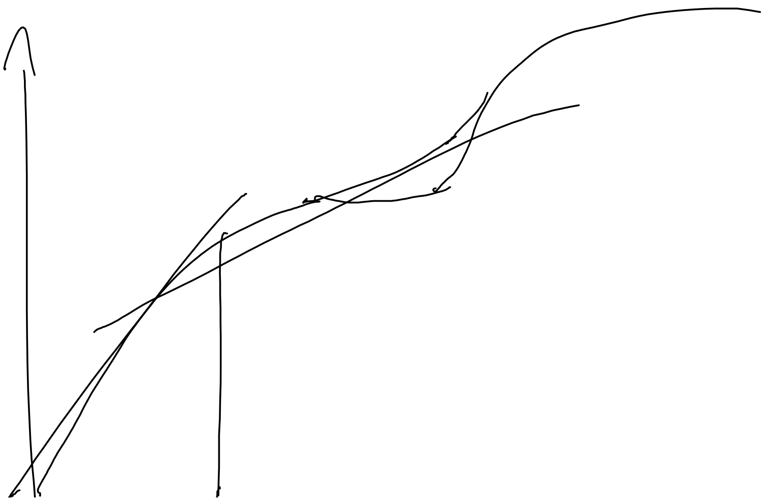
$\Rightarrow H_0$ acc., $\beta_1 = 0$

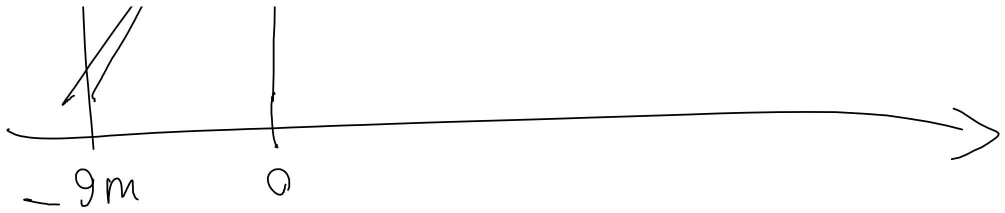

21
1
1
21




21
1
1
21






-9m
0