

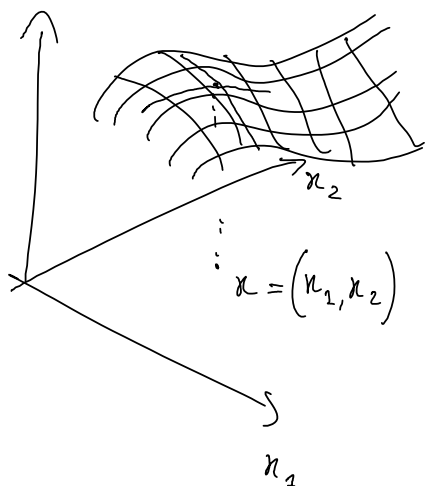
MINIMIZZAZIONE IN PIU' VARIABILI

giovedì 5 giugno 2014 10:59

Se abbiamo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, per minimizzarlo si introduce il concetto di derivata parziale

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h}$$



Vogliamo ora minimizzare $f: x(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ è minimo di f ^(locale)

$$\text{allora } f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq f(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2$$

$$\text{quindi } f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq f(x_1, \bar{x}_2) \quad \forall x_1 \quad \text{e} \quad f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq f(\bar{x}_1, x_2)$$

$$\text{questa implica che } \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$$

esempio: $f(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - b_1 x_i - b_0)^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial b_0} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial b_0} (Y_i - b_1 X_i - b_0)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^n 2 (Y_i - b_1 X_i - b_0) \cdot (-1) = \\
&= -2 \sum Y_i + 2 b_1 \sum X_i + 2 n b_0 = \\
&= 2n \left(-\bar{Y} + b_1 \bar{X} + b_0 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial b_1} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial b_1} (Y_i - b_1 X_i - b_0)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^n 2 (Y_i - b_1 X_i - b_0) (-X_i) \\
&= -2 \sum X_i Y_i + 2 b_1 \sum X_i^2 + 2 b_0 \sum X_i
\end{aligned}$$

Per cercare i candidati minimi in b_0, b_1 , annulliamo le der. parziali:

$$\begin{cases} \bar{Y} = b_1 \bar{X} + b_0 \\ b_1 \sum X_i^2 + b_0 \sum X_i = \sum X_i Y_i \end{cases}$$

$$\rightarrow b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X} \quad \text{--- } n\bar{X}$$

$$b_1 \sum X_i^2 + \left(\sum X_i \right) \left(\bar{Y} - b_1 \bar{X} \right) = \sum X_i Y_i$$

$$b_1 \sum X_i^2 - b_1 n \bar{X}^2 = \sum X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}$$

--

$$\rightarrow b_1 = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}$$