Prova parziale di Istituzioni di Analisi Superiore (modulo A) del 18 ottobre 2001 (Corso di Laurea in Matematica, Facoltá di Scienze MM.FF.NN., Universitá degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Somma	Voto parziale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1.

1. Enunciare il teorema di integrazione per serie.
2. Dimostrare che per ogni $s > 1$ si ha:

$$\int_0^\infty e^{-sx} \frac{\sin x}{x}\, dx = \operatorname{arctg} \frac{1}{s}$$

(Suggerimento: usare i seguenti risultati:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n!, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \quad x < 1$$

Esercizio 2.

1. Enunciare i teoremi di Fubini e di Tonelli.

Supponiamo che $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sia uno spazio σ-finito, e $f \in L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$. Poniamo

$$G_f = \{(x, y) \in X \times [0, \infty] \mid 0 \le y \le f(x)\}$$

2. $G_f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$;
3. $(\mu \otimes m)(G_f) = \int_X f\, d\mu$, dove m è la misura di Lebesgue.

(Suggerimento: la mappa $(x, y) \to (f(x), y)$ è $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$-misurabile e $(z, y) \to z - y$ è continua su $\mathbb{R}^2$)

Questo è l'enunciato più generale del familiare teorema "l'integrale di una funzione è l'area sotto il suo grafico".

Soluzione

Esercizio 1.

1. Vedi dispense (2 punti).

2. $$\int_0^\infty e^{-sx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{x}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dx = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-sx}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx$$

   Si può applicare il teorema di integrazione per serie se la somma degli integrali dei valori assoluti è finita; facendo il cambio di variabile $y = sx$, possiamo calcolare:

   $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-sx}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-y}\frac{y^{2n}}{(2n+1)!s^{2n}}\,dy = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n)!}{(2n+1)!s^{2n+1}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)s^{2n+1}}\end{aligned}$$

   che converge per ogni $s > 1$. Allora applicando il teorema di integrazione per serie calcoliamo

   $$\begin{aligned}\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-sx}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^\infty e^{-sx}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx = \\ &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)s^{2n+1}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{s} \qquad \text{(6 punti)}\end{aligned}$$

Esercizio 2.

1. Vedi dispense (2 punti).

2. Possiamo scrivere $G_f = X \times [0,\infty] \cap \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid y \le f(x)\}$. Il primo insieme appartiene a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ per definizione (infatti $X \in \mathcal{M}$ e $[0,\infty] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Il secondo insieme può essere ottenuto come controimmagine di un misurabile attraverso funzioni misurabili: se infatti definiamo $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ come $\varphi(x,y) = (f(x), y)$ e $\psi(z,y) = z - y$, allora φ è $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$-misurabile, ψ è continua e quindi $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-misurabile; abbiamo poi che

   $$\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid y \le f(x)\} = \varphi^{-1}(\psi^{-1}([0,\infty])) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

   e quindi segue la tesi (3 punti).

3. La funzione χ_{G_f} è positiva, quindi appartiene ad $L^+(X \times \mathbb{R})$; inoltre sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ che $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ sono σ-finiti, quindi si può applicare il teorema di Tonelli, e abbiamo:

   $$(\mu \otimes m)(G_f) = \int_X \chi_{G_f}\,d(\mu \otimes m) = \int_X \int_{\mathbb{R}} \chi_{G_f}(x,y)\,dm\,d\mu$$

   Per ogni $x \in X$, abbiamo che

   $$\chi_{G_f}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le y \le f(x) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \chi_{[0,f(x)]}(y)$$

Quindi

$$\int_X \int_{\mathbb{R}} \chi_{G_f}(x,y)\ dm\ d\mu = \int_X \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,f(x)]}\ dm\ d\mu = \int_X f(x)\ d\mu$$

e abbiamo la tesi (3 punti).

Prova parziale del corso di Istituzioni di Analisi Superiore mod. A (docente Bressan-Villella - esercitatore Vargiolu) del 18 ottobre 2001

Baruzzo Lisa	7
Bergamasco Daniele	6
Bertolotti Ilaria	4
Bianco Camillo	7,5
Bortoli Rina	2
Campalto Luana	5
Carollo Stefania	9
Catalano Michela	8
Ceccato Alessia	9
Colin Alessandra	7
Concolato Paola	6
Corezzola Massimo	8
Cricco Daniele	4
Deanni Chiara	11
De Marchi Sara	7,5
De Stefani Sara	10
Di Emidio Sara	8,5
Disconzi Daniela	8
Faccin Tiziana	8
Favaro Matteo	3,5
Fiorio Elisa	6
Gervasoni Maria Angela	8
Giglio Eulalia	7
Grassi Angela	5
Guarise Mara	8,5
Guidolin Cinzia Sabina	8
Manch Matthias	6,5
Mansi Teresa	8
Martini Serena	8
Mastrotto Enrico	4
Pescatore Isabella	7
Pevarello Lisa	8
Pieri Milena	7
Pilan Isabella	4,5
Pini Maria Silvia	8
Radicchi Lucia	9
Rossignolo Eleonora	6
Sartori Elena	13
Schiavon Veronica	8
Simioni Francesca	1
Trevisan Alessia	5,5
Turco Alessandro	7
Veronese Giulia	3
Vittadello Eva	7

Visione compiti: venerdì 19 ore 14.30 sala Riunioni o su appuntamento (Tiziano Vargiolu studio 126 interno 5883)