Capitolo 1

Preliminari

1.1 Richiami sugli spazi probabilizzati

Ricordiamo che uno **spazio misurabile** é una coppia $(E, \mathcal{E})$, dove E é un insieme, e $\mathcal{E}$ é una σ-algebra di parti di E. Con il simbolo $\sigma(\mathcal{G})$ indicheremo la σ-algebra generata dagli elementi della classe $\mathcal{G}$, che é anche la minima σ-algebra contenente $\mathcal{G}$.

Se E é uno spazio metrico, é molto frequente scegliere come $\mathcal{E}$ la seguente classe, chiamata **σ-algebra boreliana** o **tribú boreliana** di E:

$$\mathcal{B}(E) = \sigma(B(x,\varepsilon), x \in E, \varepsilon > 0)$$

dove $B(x,\varepsilon)$ é la palla aperta di centro x e raggio ε.

Ricordiamo inoltre che uno **spazio probabilizzato** é una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, dove Ω é un insieme, $\mathcal{F}$ é una σ-algebra, anche detta **tribú**, di Ω, e $\mathbf{P}$ é una misura positiva su $\mathcal{F}$ tale che $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, chiamata **misura di probabilitá**, o anche piú semplicemente **probabilitá**.

Una applicazione misurabile $X : \Omega \to E$ si chiama **variabile aleatoria**. Se su Ω vi é giá una misura $\mathbf{P}$, la variabile aleatoria X induce una misura su E, chiamata **misura immagine** di $\mathbf{P}$ mediante X, definita da $X(\mathbf{P})(B) = \mathbf{P}\{X \in B\}$ $\forall B \in \mathcal{E}$. Se $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$, allora X si dice **variabile aleatoria reale**. Allora, se X é integrabile, si puó definire l'integrale di X, o **speranza** di X, che si scrive $\int_\Omega X \, d\mathbf{P}$ o $E[X]$. Si possono poi definire i seguenti spazi:

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{X : \Omega \to \mathbf{R} \text{ v.al.} \mid E[|X|^p] < +\infty\}$$

con $1 \leq p < +\infty$, e:

$$L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{X : \Omega \to \mathbf{R} \text{ v.al.} \mid \exists K \text{ tale che } |X| < K \text{ q.c.}\}$$

Ricordiamo che gli spazi L^p sono spazi di Banach con la norma $\|X\|_{L^p} = (E[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$, e L^∞ é un Banach con la norma $\|X\|_{L^\infty} = supess|X| = \inf\{K \in \mathbf{R} \mid |X| \leq K \text{ q.c.}\}$. Inoltre L^2 é uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare $< X, Y >_{L^2} = E[X.Y]$.

Se $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$, allora X si dice **variabile aleatoria reale n-dimensionale**. Anche qui, se tutte le componenti sono integrabili, possiamo definire l'integrale in questo modo:

$$\int_\Omega X \; d\mathbf{P} = \left(\int_\Omega X_1 \; d\mathbf{P}, ..., \int_\Omega X_n \; d\mathbf{P} \right)$$

che puó anche in questo caso venire chiamato speranza ed indicato con $E[X] = (E[X_1], ..., E[X_n])$.

Valgono le seguenti relazioni:

Disuguaglianza di Markov (di Markov generalizzata): se X é una variabile aleatoria, allora $\forall p > 0$ vale:

$$\mathbf{P}\{|X| \geq a\} \leq \frac{E[|X|]}{a} \qquad \left(\mathbf{P}\{|X| \geq a\} \leq \frac{E[|X|^p]}{a^p} \right)$$

Disuguaglianza di Jensen: se X é una variabile aleatoria integrabile n-dimensionale, e $\phi : \mathbf{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ é convessa, allora $\phi(X)$ é semi-integrabile inferiormente e:

$$\phi(E[X]) \leq E[\phi(X)]$$

Disuguaglianza di Hölder: se X e Y sono variabili aleatorie, e $\alpha, \beta \geq 0$ tali che $\alpha + \beta = 1$, allora:

$$E[|X|^\alpha |Y|^\beta] \leq E[|X|]^\alpha E[|Y|]^\beta$$

Un caso particolare di questa disuguaglianza, ottenuta con $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, é la seguente:
Disuguaglianza di Cauchy - Schwartz: se X e Y sono variabili aleatorie, allora:

$$E[|X||Y|] \leq \sqrt{E[|X|^2] E[|Y|^2]}$$

Da ció si ricava che, se $p > q$, allora $L^p \subseteq L^q$, e $\|X\|_{L^q} \leq \|X\|_{L^p}$.

Se X, Y sono variabili aleatorie n-dimensionali, si chiama **matrice delle covarianze** di X, Y, o piú semplicemente **covarianza**, la matrice:

$$C = Cov(X, Y) = (Cov(X, Y))_{ij} = (E[(X_i - E[X_i])(Y_j - E[Y_j]))_{ij}$$

Se $n = 1$, possiamo definire **varianza** di X il numero $Var[X] = Cov(X, X)$, che é finito se e solo se $X \in L^2$.

1.2 Convergenze di variabili aleatorie

In questo paragrafo, E sará sempre uno spazio metrico dotato della distanza d e misurabile se dotato della tribú boreliana $\mathcal{B}(E)$.

Diciamo che una successione $\{\mu_n\}_n$ di misure converge **debolmente** a μ (che si indica con $\mu_n \longrightarrow^{deb.} \mu$) se, per ogni funzione $f : E \to \mathbf{R}$ continua e limitata, vale:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f \; d\mu_n = \int_E f \; d\mu$$

Siano ora $X, X_n, n \in N$ variabili aleatorie da Ω a valori in E, e definiamo quattro tipi di convergenze; diciamo che X_n converge a X:

- **quasi certamente** ($X_n \longrightarrow^{q.c.} X$) se $\exists A \in \mathcal{F}$ trascurabile tale che

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \; \forall \omega \in A^c$$

- **in** L^p ($X_n \longrightarrow^{L^p} X$) se $X_n, X \in L^p$ e:

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{L^p} = 0$$

- **in probabilitá** ($X_n \longrightarrow^{\mathbf{P}} X$) se $\forall \varepsilon > 0$ abbiamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{d(X_n, X) > \varepsilon\} = 0$$

- **in legge** ($X_n \longrightarrow^{legge} X$) se, chiamate $\mu_n = X_n(\mathbf{P})$, $\mu = X(\mathbf{P})$, abbiamo che $\mu_n \longrightarrow^{deb.} \mu$.

Vale il seguente risultato:

Proposizione 1.1 *se X_n, X sono variabili aleatorie, allora:*
1) se $X_n \longrightarrow^{q.c.} X$, allora $X_n \longrightarrow^{\mathbf{P}} X$
2) se $X_n \longrightarrow^{L^p} X$, allora $X_n \longrightarrow^{\mathbf{P}} X$
3) se $X_n \longrightarrow^{\mathbf{P}} X$, allora $X_n \longrightarrow^{legge} X$
4) se $X_n \longrightarrow^{\mathbf{P}} X$, allora esiste una sottosuccessione $(X_{n_k})_k$ tale che $X_{n_k} \longrightarrow^{q.c.} X$.

□

Enunciamo inoltre il seguente criterio di convergenza in probabilitá:

Proposizione 1.2 *se X_n é una successione a valori in uno spazio metrico completo $(E, \mathcal{E})$; allora esiste una v. al. X a valori in E tale che $X_n \longrightarrow^{\mathbf{P}} X$, se e solo se $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0$, esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\forall m, n \geq \nu$ si ha:*

$$\mathbf{P}\{d(X_n, X) > \varepsilon\} < \delta$$

$\square$

1.3 Indipendenza

Se abbiamo $X_1, ..., X_m$ variabili aleatorie a valori rispettivamente in $(E_1, \mathcal{E}_\infty), ..., (E_m, \mathcal{E}_\Updownarrow)$, esse si dicono **indipendenti** se:

$$\mathbf{P}\{X_1 \in A_1, ..., X_m \in A_m\} = \prod_{i=1} m\mathbf{P}\{X_i \in A_i\} \; \forall A_1 \in \mathcal{E}_1, ..., A_m \in \mathcal{E}_m$$

Analogamente gli eventi $A_1, ..., A_m \in \mathcal{F}$ si dicono **indipendenti** se lo sono le loro funzioni indicatrici $\mathbf{1}_{A_1}, ..., \mathbf{1}_{A_m}$. Inoltre, se $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_m$ sono sottotribú di $\mathcal{F}$, allora esse si dicono **indipendenti** se, per ogni $A_1 \in \mathcal{F}_1, ..., A_m \in \mathcal{F}_m$, gli eventi $A_1, ..., A_m$ sono indipendenti. É chiaro che $X_1, ..., X_m$ sono indipendenti se e solo se lo sono $\sigma(X_1), ..., \sigma(X_m)$.

Proposizione 1.3 *se X e Y sono variabili aleatorie integrabili e indipendenti, allora anche XY é integrabile e:*

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

$\square$

1.4 Teorema delle classi monotone

Ricordiamo il seguente risultato, noto come **teorema delle classi monotone**, che risulterá di frequente uso (anche se non sempre dichiarato) nel resto della trattazione che faremo.

Teorema 1.4 *se E é un insieme, $\mathcal{C}$ una classe di parti di E stabile per intersezione finita, e $\mathcal{H}$ uno spazio vettoriale di funzioni limitate reali su E tale che:*

1) se $\{f_n\}_n$ é una successione crescente di elementi di $\mathcal{H}$, tutti maggiorati da uno stesso elemento di $\mathcal{H}$, allora $\sup_n f_n \in \mathcal{H}$.

2) $\mathcal{H}$ contiene la funzione 1 e le indicatrici degli elementi di $\mathcal{C}$

allora $\mathcal{H}$ contiene tutte le funzioni $\sigma(\mathcal{C})$-misurabili e limitate.

$\square$

1.5 Teorema di Radon - Nikodym

Una misura μ si dice **assolutamente continua** rispetto ad un'altra misura ν se $\nu(A) = 0$ implica $\mu(A) = 0$. Due misure si dicono **equivalenti** se ognuna delle due é assolutamente continua rispetto all'altra.

Ricordiamo che vale il seguente teorema, noto come **teorema di Radon - Nikodym**

Teorema 1.5 *se μ, ν sono misure su $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$, allora μ é assolutamente continua rispetto a ν se e solo se esiste una funzione misurabile $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, chiamata* **densitá di μ rispetto a ν***) tale che*

$$\mu(A) = \int_A f(x)\ d\nu(x)\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$$

Questa relazione é anche scritta piú brevemente $d\mu = f.d\nu$.

□

1.6 Leggi normali sulla retta

Ricordiamo che una variabile aleatoria reale X si dice **gaussiana** o **normale** di media m e varianza σ^2, se la sua legge ha come densitá (rispetto alla misura di Lebesgue) la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}\right)$$

La sua legge $X(\mathbf{P})$ si dice **legge gaussiana** o **legge normale** e si indica piú brevemente con $N(m, \sigma^2)$.

Ricordiamo che, se X ha legge normale $N(m_1, \sigma_1^2)$, Y ha legge normale $N(m_2, \sigma_2^2)$, e X e Y sono indipendenti, allora $X+Y$ é normale di legge $N(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

1.7 Variabili aleatorie in spazi di Hilbert

Se abbiamo lo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ e lo spazio di Hilbert $(H, \mathcal{H})$, possiamo definire le seguenti classi di variabili aleatorie:

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; H) = \left\{ X : \Omega \to H \text{ misurabile } \middle| \int_\Omega \|X\|_H^p \, d\mathbf{P} < +\infty \right\}$$

Se $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; H)$, posso definire la **speranza** di X $E[X]$ come l'unico elemento di H tale che:

$$\forall x \in H, < E[X], x >= E[< X, x >_H]$$

Se $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; H)$, posso definire la **covarianza** di X e Y $(Cov(X,Y))$ come l'unico elemento di $(H^2)^*$ tale che:

$$\forall x, y \in H, (Cov(X,Y))(x,y) = E[< X, x >_H < Y, y >_H]$$

La covarianza si puó anche rappresentare mediante un operatore lineare continuo $Q : H \to H$ tale che:

$$< Qx, y >_H = Cov(X, Y)$$

Se $H = \mathbf{R}^n$, allora la speranza é quella definita nel modo usuale, (cioé $E[X] = (E[X_1], ..., E[X_n]))$ e la covarianza di due variabili aleatorie viene ad essere la loro matrice delle covarianze: $(Cov(X, Y))_{ij} = Cov(X_i, Y_j)$.

1.8 Speranza condizionale

Se $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, e $\mathcal{G}$ é una tribú contenuta in $\mathcal{F}$, chiamo **speranza condizionale** di X rispetto a $\mathcal{G}$ l'unica variabile aleatoria $E[X|\mathcal{G}]$ tale che:

$$\int_B E[X|\mathcal{G}]\ d\mathbf{P} = \int_B X\ d\mathbf{P}\ \forall B \in \mathcal{G}$$

Ricordiamo le seguenti proprietá della speranza condizionale: se $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, allora:

1) $E[aX + bY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[X|\mathcal{G}]\ \forall a, b \in \mathbf{R}$
2) se $X \geq 0$ q.c., allora anche $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$ q.c.
3) $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$
4) se $\mathcal{H}$ é una sottotribú di $\mathcal{G}$, allora $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$
5) se Z é una variabile aleatoria $\mathcal{G}$-misurabile e limitata, allora $E[ZX|\mathcal{G}] = ZE[X|\mathcal{G}]$
6) se X é indipendente da $\mathcal{G}$, allora $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$.