Capitolo 2

Processi stocastici

2.1 Definizioni e proprietá

Se abbiamo uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, e una famiglia di variabili aleatorie $(X_t)_{t\in T}$ a valori in uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$, e con $T \subseteq \mathbf{R}$, diciamo che la famiglia $(X_t)_{t\in T}$ é un **processo stocastico** (o piú semplicemente un **processo**) a valori in $(E, \mathcal{E})$, che viene chiamato **spazio degli stati**, e chiamiamo l'insieme T **insieme dei tempi**). Usualmente T é o un insieme discreto (di solito $\mathbf{N}$ o $\mathbf{Z}$), e si parla allora di processo **a tempi discreti**, o un intervallo chiuso della retta reale, e si parla di processo **a tempi continui**.

Se ci mettiamo nel caso particolare in cui $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ (rispettivamente $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$, allora $(X_t)_{t\in T}$ si dice **processo reale** (rispettivamente **processo reale** n-**dimensionale**).

Se scegliamo $\omega \in \Omega$, allora l'applicazione $T \ni t \to X_t(\omega) \in E$ é chiamata **traiettoria** di ω.

Se abbiamo il processo $(X_t)_{t\in T}$ a valori in $(E, \mathcal{E})$, possiamo costruire lo spazio $(E^T, \mathcal{E}^{\otimes T})$ e l'applicazione misurabile $\pi : \Omega \to E^T$, tale che $\pi(\omega) = (X_t(\omega))_{t\in T}$. La misura $\pi(\mathbf{P})$ su E, immagine di $\mathbf{P}$ mediante π, si chiama **legge del processo**. Allora, se conosciamo la legge di un processo, conosciamo in particolare le sue distribuzioni finite, cioé le distribuzioni:

$$\mu_\pi(A_1 \times ... \times A_k) = \mathbf{P}\{X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_k} \in A_k\}$$

dove $A_1, ..., A_k \in \mathcal{E}$, e abbiamo chiamato $\Pi = \{\pi = (t_1, ..., t_n) \mid n \geq 1, t_i \in T\}$ l'insieme delle possibili n-uple di coordinate in $[0, T]$.

A volte si presenta il problema inverso; si ha cioé una famiglia di leggi di dimensione finita $(\mu_\pi)_{\pi\in\Pi}$ su $(E, \mathcal{E})$, e si vuole costruire un processo $(X_t)_t$ avente come famiglia di distribuzioni finite proprio $(\mu_\pi)_{\pi\in\Pi}$. La soluzione standard a questo problema é data dal seguente teorema, dovuto a Kolmogorov.

Teorema 2.1 *: se E é uno spazio metrico σ-compatto, e poniamo $\Omega = E^T$, $X_t(\omega) = \omega(t)$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t, s \in T\}$, $\mathcal{F} = \sigma\{X_t, t \in T\}$, $\Pi = \{\pi = (t_1, ..., t_n) \mid n \geq 1, t_i \in T\}$ e $(\mu_\pi)_{\pi\in\Pi}$ é un sistema di distribuzioni di dimensione finita su $(E, \mathcal{B}(E))$ tale che:*

- $\mu_{(t_1,...,t_n)}$ é una distribuzione su $E_{t_1} \times ... \times E_{t_n} = E^\pi$.

- le $(\mu_\pi)_{\pi\in\Pi}$ soddisfano la seguente **condizione di consistenza***: se $\pi' \subseteq \pi \in \Pi$, e definiamo $P_{\pi,\pi'} : E^\pi \to E^{\pi'}$ come la proiezione naturale, allora abbiamo che: $P_{\pi,\pi'}(\mu_\pi) = \mu_{\pi'}$.*

allora esiste una unica legge di probabilitá $\mathbf{P}$ su $(\Omega, \mathcal{F})$ tale che le μ_π sono le distribuzioni di dimensione finita del processo $(X_t)_t$.

$\square$

Il processo $(X_t)_{t\in T}$ si dice **stazionario** se $\forall t_1, ..., t_k \in T, A_1, ..., A_k \in \mathcal{E}$ si ha che:

$$\mathbf{P}\{X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_k} \in A_k\} = \mathbf{P}\{X_{t_1+h} \in A_1, ..., X_{t_k+h} \in A_k\}$$

$\forall h$ tale che $t_1 + h, ..., t_k + h \in T$. In particolare, se un processo é stazionario, allora tutte le X_t hanno la stessa legge.

Diciamo che il processo $(Y_t)_{t\in T}$ é una **versione** del processo $(X_t)_{t\in T}$ se i due processi sono a valori sullo stesso spazio degli stati e $\forall t \in T, X_t = Y_t$ $\mathbf{P}$-q.c.. Due processi si dicono **indistinguibili** se sono a valori sullo stesso spazio degli stati e $\mathbf{P}\{X_t = Y_t \ \forall t \in T\} = 1$. Allora due processi indistinguibili sono una versione l'uno dell'altro, ma non vale il viceversa.

Introduciamo ora il concetto di processo adattato. Diciamo che una famiglia di tribú $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ é una **filtrazione** se $\mathcal{F}_t \in \mathcal{F}$ $\forall t \in T$ e $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ $\forall s < t \in T$. Allora il processo $(X_t)_{t\in T}$ si dice **adattato** alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, se ogni X_t é $\mathcal{F}_t$-misurabile.

Se costruiamo la filtrazione $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$, allora $(X_t)_{t\in T}$ é adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, che si chiama **filtrazione naturale** del processo $(X_t)_{t\in T}$.

Supponiamo, d'ora in poi, che T sia un intervallo di retta reale. Per ogni $t \in T$ per cui esiste un intorno destro in T, costruiamo $\mathcal{F}_{t^+} = \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$; chiaramente $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t^+}$; diciamo che la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$ é **continua a destra** se $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$ $\forall t \in T$ per cui esiste un intorno destro in T.

Una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ si dice **standard** se:

1) é continua a destra

2) $\forall t$, $\mathcal{F}_t$ contiene tutti gli eventi trascurabili di $\mathcal{F}$.

Un processo si dice **standard** se é adattato ad una filtrazione standard.

D'ora in poi, se non vi saranno pericoli di confusione, indicheremo il processo $(X_t)_{t\in T}$ piú semplicemente con $(X_t)_t$, o addirittura con X.

D'ora in poi supponiamo che E sia uno spazio vettoriale metrico, e che $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. Un processo a valori in $(E, \mathcal{B}(E))$ si dice **continuo** (rispettivamente **quasi certamente continuo**) se $\forall\omega \in \Omega$ (risp. per quasi ogni $\omega \in \Omega$), l'applicazione $t \to X_t(\omega)$ é continua. Si puó dare una analoga definizione per i processi **continui a destra** o **continui a sinistra**.

Un processo $(X_t)_t$ si dice **misurabile** se l'applicazione $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ é misurabile da $(T \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{F})$ in $(E, \mathcal{B}(E))$.

Un processo $(X_t)_t$ si dice **progressivamente misurabile** se $\forall u \in [0, T]$ l'applicazione:

$$([0, u] \times \Omega, \mathcal{B}([0, u]) \times \mathcal{F}_u) \ni (t, \omega) \to X_t(\omega) \in (E, \mathcal{B}(E))$$

é misurabile. É evidente che un processo progressivamente misurabile é misurabile.

Proposizione 2.2 *: se $(X_t)_t$ é continuo da destra o da sinistra, allora é progressivamente misurabile.*

Per una dimostrazione vedere Baldi[1], pagg. 25 - 26.

□

D'ora in poi supponiamo che $(E, \mathcal{B}(E)) = (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$. Introduciamo ora un utile criterio per stabilire se un processo é continuo; questo criterio é chiamato **test di Kolmogorov**

Teorema 2.3 *: se T é un aperto di $\mathbf{R}$, e $(X_t)_{t \in T}$ é un processo n-dimensionale standard tale che $\exists \alpha > 0, \beta > 0, c > 0$ tali che:*

$$E[\|X_y - X_z\|^\beta] \leq c|y - z|^{1+\alpha}$$

allora esiste un processo $(Y_t)_{t \in T}$ indistinguibile da $(X_t)_{t \in T}$ a traiettorie hölderiane di esponente γ $\forall \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ su ogni compatto di T.

Per una dimostrazione vedere Baldi[1], pagg. 26 - 28.

□

2.2 Processi gaussiani

Rivolgiamo ora la nostra attenzione ad una classe particolare di processi. Un processo $(X_t)_{t \in T}$ a valori su uno spazio di Hilbert $(H, \mathcal{B}(H))$ si dice **gaussiano** se $\forall t_1, ..., t_n \in T, \forall \phi \in (H^n)^*$, la variabile aleatoria reale $\phi(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ é gaussiana. Se $(H, \mathcal{B}(H)) = (\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$, ció significa semplicemente che $\forall t_1, ..., t_n \in T, \forall \phi \in (\mathbf{R}^d)^n$ la variabile aleatoria reale $\sum_i < X_{t_i}, \phi_i >_{\mathbf{R}^d}$ é gaussiana.

Se il processo $(X_t)_{t \in T}$ é gaussiano, si chiama **media** del processo $(X_t)_{t \in T}$ la funzione $m_X : T \to E$:

$$m_X(t) = E[X_t]$$

e **funzione delle covarianza**, o piú semplicemente **covarianza** del processo la funzione $k_X : T^2 \to E$:

$$k_X(s,t) = Cov(X_s, X_t)$$

Citiamo ora un risultato classico che ci permette di identificare la legge di un processo gaussiano con la sua media e covarianza:

Teorema 2.4 *: se due processi reali d-dimensionali $(X_t)_t$ e $(Y_t)_t$ sono gaussiani con media $m_X = m_Y$ e covarianza $Cov(X_s, X_t) = Cov(Y_s, Y_t)$, allora $X(\mathbf{P}) = Y(\mathbf{P})$.*

Dimostrazione: la legge di un processo é univocamente determinata dalle sue distribuzioni parziali che, nel caso di processi gaussiani, sono univocamente determinate dalla media e dalla covarianza; allora, se X e Y hanno la stessa media e la stessa covarianza e sono gaussiani, allora hanno anche la stessa legge.

□

2.3 Tempi di arresto

La variabile aleatoria $\tau : \Omega \to [0,T]$ si dice **tempo di arresto** per la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$ se $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \in [0,T]$. Se chiamiamo $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t, t \in T)$, allora possiamo definire la σ-algebra del tempo di arresto τ in questo modo:

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \in T\}$$

Notiamo che se ρ e τ sono tempi di arresto per la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$, anche $\rho \wedge \tau$ e $\rho \vee \tau$ lo sono, e se $\rho \leq \tau$, allora $\mathcal{F}_\rho \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

Vediamo subito un esempio di tempo di arresto.

Lemma 2.5 *: se $(X_t)_t$ é un processo continuo, a valori in $\mathbf{R}^n$ e adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$, e definiamo la variabile aleatoria:*

$$\tau = \inf\{0 \leq s \leq T | X_s \in B\}, \text{ dove } B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$$

allora τ é un tempo di arresto rispetto a $(\mathcal{F}_t)_t$.

Dimostrazione: bisogna dimostrare che $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \in [0,T]$; notiamo che:

$$\{\tau > t\} = \cap_{0 \leq s \leq t}\{X_s \in B^c\} = \cap_{0 \leq s \leq t, s \in \mathbf{Q}}\{X_s \in B^c\}$$

l'ultima uguaglianza sussiste poiché il processo é continuo. Notiamo che gli eventi all'ultimo membro sono una quantitá numerabile ed appartengono tutti a $\mathcal{F}_t$, per cui $\{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$, e τ é un tempo di arresto.

□

2.4 Martingale

Un processo stocastico $(X_t)_{t\in T}$, adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ e tale che $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})\ \forall t$ si dice:

- una **martingala** se $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s\ \forall s \leq t$
- una **supermartingala** se $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s\ \forall s \leq t$
- una **sottomartingala** se $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s\ \forall s \leq t$

É chiaro che una combinazione lineare di due martingale é ancora una martingala, e una combinazione lineare a coefficienti positivi di due supermartingale (risp. sottomartingale) é una supermartingala (sottomartingala); infine, se X é una supermartingala, allora $-X$ é una sottomartingala, e viceversa.

Teorema 2.6 *se $(M_t)_t$ é una $(\mathcal{F}_t)_t$-martingala continua a destra, e τ_1, τ_2 sono due tempi di arresto tali che τ_2 é limitato e $\tau_1 \leq \tau_2$, allora:*

$$E[M_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}] = M_{\tau_1}$$

Per una dimostrazione vedere Baldi[1], pagg. 92 - 93

Corollario 2.7 *se $(M_t)_t$ é una $(\mathcal{F}_t)_t$-martingala continua a destra, e τ é un tempo d'arresto, allora $(M_{t\wedge\tau})_t$ é una $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})_t$-martingala.*

□

Una martingala si dice **limitata** in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ se:

$$\sup_{t\in T} E[|X_t|^p] < +\infty$$

Citiamo ora il seguente risultato, noto come **disuguaglianza di Doob**:

Teorema 2.8 *: se $(X_t)_t$ é una martingala continua a destra (o continua a sinistra) limitata in L^p, allora:*

$$\| \sup_t |X_t| \|_{L^p}^p \leq q \sup_t \|X_t\|^p$$

dove q é l'esponente coniugato di p, cioé il numero reale tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Per una dimostrazione vedere Baldi[1], pagg. 86 - 87.

□

2.5 Martingale locali

Un processo $(M_t)_t$, adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$, é una **martingala locale** se esiste una successione $(\tau_n)_n$ di tempi di arresto tali che:

- $\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$ q.c.

- $(M_{\tau_n \wedge t})_t$ é una martingala limitata $\forall\ n$

se succede questo, dico che la successione $(\tau_n)_n$ **riduce** la martingala locale $(M_t)_t$.

Notiamo subito che una martingala continua é una martingala locale; basta infatti porre:

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\{t : |M_t| \geq n\} & \\ +\infty & \text{se } |M_t| > n \ \forall t \end{cases}$$

allora $(M_{\tau_n \wedge t})_t$ é una martingala e $|M_{\tau_n \wedge t}| \leq n \ \forall t$.

Lemma 2.9 *: se $(M_t)_t$ é una martingala locale positiva, allora é una supermartingala.*

Dimostrazione: prendiamo la successione $(\tau_n)_n$ che riduce $(M_t)_t$; allora, applicando il lemma di Fatou e la proprietá di martingala ho:

$$E[M_t] \leq \liminf_{n\to\infty} E[M_{\tau_n \wedge t}] = \liminf_{n\to\infty} E[M_0] = E[M_0]$$

allora $(M_t)_t \in L^1 \ \forall t$.
La condizione di supermartingala é equivalente alla seguente:

$$\forall A \in \mathcal{F}_s : E[(M_t - M_s)\mathbf{1}_A] \leq 0$$

Poiché $\{\tau_n \leq s\} \in \mathcal{F}_s$ abbiamo:

$$E[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_n > s\}}(M_{t\wedge\tau_n} - M_s)] = E[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_n > s\}}(M_{t\wedge\tau_n} - (M_{s\wedge\tau_n})] = 0$$

allora, siccome $\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_n > s\}}(M_{t\wedge\tau_n} - M_s) \geq -M_s$, possiamo applicare il lemma di Fatou:

$$0 \geq \limsup_{n\to\infty} E[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_n > s\}}(M_{t\wedge\tau_n} - M_s)] = E[\mathbf{1}_{A\cap\Omega}(M_t - M_s)]$$

e abbiamo la tesi.

□

2.6 Il moto browniano

Vediamo ora un processo che é contemporaneamente un esempio di processo gaussiano reale ed una martingala.

Diciamo che il processo $(W_t)_{t\geq 0}$ adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq)}$ é un **moto browniano** se:

- $W_0 = 0$ $\mathbf{P}$-q.c.

- se $s < t$, $W_t - W_s$ é indipendente da $\mathcal{F}_s$

- se $s < t$, $W_t - W_s$ ha legge $N(0, t-s)$

Lemma 2.10 *: il processo $(W_t)_t$ é una martingala ed é gaussiano con media $E[W_t] = 0$ $\forall t \geq 0$ e covarianza $Cov(W_s, W_t) = s$ $\forall 0 \leq s \leq t$.*

Dimostrazione: siccome $W_t - W_s$ é indipendente da $\mathcal{F}_s$ $\forall s < t$ ed ha legge $N(0, t-s)$, allora $E[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] = 0$, e quindi $(W_t)_t$ é una martingala; inoltre, $\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{R}$, $\forall t_1, ..., t_n \geq 0$, abbiamo che $\sum_i \lambda_i W_{t_i}$ é una variabile aleatoria gaussiana. Dimostriamo questo per induzione. Per $n = 1$ é banale, poiché $W_{t_1} = W_{t_1} - 0 = W_{t_1} - W_0$, che ha legge $N(0, t_1)$. Supponiamo ora che ogni combinazione lineare della forma $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i W_{t_i}$ sia una variabile aleatoria gaussiana; allora:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i W_{t_i} = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i W_{t_i} + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) W_{t_{n-1}} + \lambda_n (W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$$

L'ultimo addendo é gaussiano e indipendente da $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$, e la variabile aleatoria $\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i W_{t_i} + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) W_{t_{n-1}}$ é $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$-misurabile e normale; allora la somma delle due variabili aleatorie é una variabile aleatoria normale.

Calcoliamo ora la legge del processo: innanzitutto $E[W_t] = 0$ $\forall t \geq 0$; inoltre, se $s < t$, poiché $W_t - W_s$ é indipendente da W_s, abbiamo:

$$Cov(W_s, W_t) = Cov(W_s, W_t - W_s) + Var[W_s] = 0 + s = s$$

Rimangono cosí determinate media e covarianza del processo; siccome questo é gaussiano, da queste due quantitá si ricava la legge.

□

Lemma 2.11 *: se $(W_t)_t$ é un moto browniano, allora esiste sempre una sua versione hölderiana con esponente $\gamma < \frac{1}{2}$.*

Dimostrazione: per dimostrare la tesi, basta applicare il test di Kolmogorov al processo; prendiamo quindi $s < t$ e calcoliamo:

$$\begin{aligned} E[|W_t - W_s|^{2n}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbf{R}} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}\, dx = \\ &= (t-s)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} y^{2n} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = c_n |t-s|^n \end{aligned}$$

dove abbiamo chiamato $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} y^{2n} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$, che é una costante reale. Allora esiste una versione di $(W_t)_t$ a traiettorie hölderiane di esponente minore di $\frac{n-1}{2n}$; siccome $\forall \gamma < \frac{1}{2}$ possiamo trovare un n tale che $\gamma < \frac{n-1}{2n}$, abbiamo la tesi.

□

2.7 Costruzione di un moto browniano

Un moto browniano si puó costruire in diversi modi; il metodo standard é costruire una misura sullo spazio $\mathbf{R}^{[0,T]}$ dotato della tribú prodotto, e di costruire il moto browniano tramite le proiezioni di questo spazio sull'insieme dei tempi. La particolare misura che si ottiene é chiamata **misura di Wiener**; poiché abbiamo visto che il moto browniano ha traiettorie q.c. hölderiane di esponente minore di $\frac{1}{2}$, in particolare ha traiettorie continue, per cui la misura di Wiener sará concentrata sullo spazio:

$$C_0([0,T]) = \{f : [0,T] \to \mathbf{R} \mid f \text{ continua e } f(0) = 0\}$$

Notiamo inoltre che la proiezione della tribú prodotto di $\mathbf{R}^{[0,T]}$ su $C_0([0,T])$ coincide con la sua tribú boreliana. Infatti, ogni insieme della forma $B(f,\varepsilon) = \{g \in C_0([0,T]) \mid \|f - g\|_C < \varepsilon\}$ é ottenibile nella tribú prodotto in questo modo:

$$\{g \in C_0([0,T]) \mid |f(r) - g(r)| < \varepsilon \ \forall r \in \mathbf{Q} \cap [0,T]\}$$

Poiché le palle aperte generano la tribú boreliana di $C_0([0,T])$, allora questa é inclusa nella tribú prodotto di $\mathbf{R}^{[0,T]}$. Viceversa, ogni insieme G della forma:

$$G = \{g \in C_0([0,T]) \mid |c - g(r)| < \varepsilon \ \}$$

per qualche $r \in [0,T]$, é esprimibile mediante l'unione $\cup_{f(r)=c} B(f,\varepsilon)$; siccome gli insiemi della forma di G formano una base della traccia su $C_0([0,T])$ della tribú prodotto di $\mathbf{R}^{[0,T]}$, allora questa é inclusa nella tribú boreliana di $C_0([0,T])$.

Diamo ora un modo per costruire la misura di Wiener, che fa uso del teorema di estensione di Kolmogorov. Per fare uso del teorema, descriviamo intanto le distribuzioni di dimensione finita; abbiamo visto che un moto browniano é un processo gaussiano; allora $(W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ ha media 0 e covarianza:

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & ... & ... & t_1 \\ . & t_2 & ... & t_2 \\ . & . & & . \\ t_1 & ... & ... & t_n \end{pmatrix}$$

La condizione di coerenza segue subito dal fatto che la legge del vettore $(W_{t_{i_1}}, ..., W_{t_{i_n}})$ é una legge normale avente come media 0 e come covarianza il minore della matrice A costituito dalle righe e dalle colonne di indici $i_1, ..., i_n$. Allora posso applicare il teorema di estensione di Kolmogorov, e trovare un'unica misura di probabilitá $\mathbf{P}$ sullo spazio $\Omega = \mathbf{R}^{[0,T]}$, dotato della tribú $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbf{R})^{\otimes[0,T]}$, che sia la legge del processo.

2.8 Moto browniano $k-$dimensionale

Ora che abbiamo costruito un moto browniano unidimensionale, possiamo costruire agevolmente un moto browniano $k-$dimensionale.

Diciamo che il processo $(W(t))_t$, adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$ e a valori in $\mathbf{R}^k$ é un **moto browniano $k-$dimensionale** se ogni componente $(W_i(t))_t$ é un moto browniano unidimensionale, indipendente dalle altre componenti. Si nota subito che un moto browniano $k-$dimensionale gode delle tre proprietá seguenti:

- $W(0) = 0$ $\mathbf{P}-$q.c.

- se $s < t$, allora $W(t) - W(s)$ é indipendente da $\mathcal{F}_s$

- se $s < t$, allora $W(t) - W(s)$ ha legge $N(0, (t-s)I)$, dove I é la matrice identitá $k-$dimensionale

Lemma 2.12 *: il processo $(W_t)_t$ é una martingala ed é gaussiano con media $E[W_t] = 0$ $\forall t \geq 0$ e covarianza $Cov(W_s, W_t) = sI$ $\forall 0 \leq s \leq t$, dove I é la matrice identitá $k-$dimensionale.*

Lemma 2.13 *: se $(W_t)_t$ é un moto browniano, allora esiste sempre una sua versione hölderiana con esponente $\gamma < \frac{1}{2}$.*

Le dimostrazioni dei due lemmi sono analoghe a quelle per il moto browniano unidimensionale.